УДК 514.765

М.В. Славская

Многомерная линейная модель распределения ресурсов с ограничениями

Введение.

Динамическое программирование (ДП) связано с многошаговыми процессами принятия решения. Впервые данный термин был введен Беллманом в его известной монографии [1], в этой работе на основе рассмотрения функциональных уравнений были заложены математические основы ДП. В работах [2], [3], [6], [5], [7] изучены многочисленные примеры задач ДП допускающих явное решение.

Отметим, что в основном рассматривались двумерные задачи, решение которых связано с нахождением экстремума функции одной переменной, и потому иногда допускающих явное решение. Многомерные задачи, как правило, явного решения не имеют и решаются численно.

В данной работе получено явное решение для одной модификации многомерной линейной задачи распределения ресурсов, указана простая геометрическая трактовка этого решения, позволяющая полностью исследовать данную задачу.

Напомним классическую формулировку задачи распределения ресурсов между m предприятиями.

Задача. Планируется деятельность m предприятий в течение n лет. Начальные средства составляют ξ_0. Средства X, вложенные в i-ое предприятие, приносят к концу года доход $f_i(X)$ и возвращаются в размере $\varphi_i(X) < X$; $i = 1, 2, \ldots, m$. По истечении года все оставшиеся средства заново перераспределяются между предприятиями, новых средств не поступает и доход в производство не вкладывается. Требуется найти оптимальный способ распределения имеющихся средств.

Процесс распределения ресурсов рассматривается как n-шаговый, в котором номер шага соответствует номеру года. Управляемая система в данном случае это m предприятий с вложенными в них средствами. Система характеризуется одним параметром состояния ξ_{k-1} $k = 1, \ldots, n$ – количеством средств, которые следует перераспределить в начале k-го года. Переменных управления на каждом шаге m: x_{ki} – количество средств, выделенных соответственно i-ому предприятию. Так как средства ежегодно перераспределяются полностью то

$$x_{k1} + x_{k2} + ... + x_{km} = \xi_{k-1}.$$

Показатель эффективности задачи – доход, полученный от m предприятий в течение n лет – составляет:

$$Z = \sum_{k=1}^{n} [f_1(x_{k1}) + f_2(x_{k2}) + ... + f_m(x_{km})]$$

Уравнение состояния выражает остаток средств ξ_k после k-го шага и имеет вид:

$$\xi_k = \varphi_1(x_{k1}) + \varphi_2(x_{k2}) + ... + \varphi_m(x_{km})$$

Пусть $Z_k^*(\xi_{k-1})$ – условный оптимальный доход, полученный от распределения средств ξ_{k-1} между m предприятиями в период с k-го года до последнего n-го. Запишем рекуррентные соотношения для этих функций, соответственно последнее уравнение Беллмана (при $k = n$), и уравнения Беллмана при $k = n-1, n-2, \ldots, 1$ примут вид;

$$Z_n^*(\xi_{n-1}) = \max_{x_{n1}+x_{n2}+...+x_{nm}=\xi_{n-1}} [f_1(x_{n1}) + f_2(x_{n2}) + ... + f_m(x_{nm})]$$

$$Z_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{x_{k1}+x_{k2}+...+x_{km}=\xi_{k-1}} \left[f_1(x_{k1}) + f_2(x_{k2}) + ... + f_m(x_{km}) + Z_{k+1}^*(\xi_k)\right].$$

Здесь $\xi_k = \varphi_1(x_{k1}) + \varphi_2(x_{k2}) + ... + \varphi_m(x_{km})$. Как видно из этих уравнений, даже для функций f_i, φ_i простого вида, рассчитывать на получение явного решения затруднительно. Большинство известных явных решений для двумерной задачи приведено в [1].

Линейная модель распределения ресурсов с ограничениями.

Проблема государственного управления и поддержки массы мелких частных предприятий подсказывает следующее обобщение многомерной линейной модели распределения ресурсов [4].

Задача. Планируется деятельность m предприятий в течение n лет. Начальные средства составляют ξ_0. Средства X, вложенные в i-ое предприятие, приносят к концу года доход $f_i(X)$ и возвращаются в размере $\phi_i(X) < X$; $i = 1, 2, \ldots, m$. По истечении года все оставшиеся средства заново перераспределяются поровну между определенным, фиксированным процентом $\alpha\%$ предприятий (например $\alpha = 25\%$), которые имеет смысл финансово поддержать и привлечь к данному проекту. Новых средств не поступает, доход в производство не вкладывается.

Требуется найти оптимальный способ отбора тех предприятий, между которыми будет происходить распределение имеющихся средств. Процесс выбора рассматриваем как n-шаговый, в котором номер шага соответствует номеру года.

Теорема. *Пусть функции $f_i(X)$ и $\varphi_i(X)$, линейные $f_i(X) = h_i X$, $\varphi_i(X) = r_i X$; $h_i > 0$, $0 < r_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда функции условного оптимального дохода $Z_k^*(\xi_{k-1})$ также будут линейные $Z_k^*(\xi_{k-1}) = H_k \xi_{k-1}$, при этом коэффициенты H_k находятся рекуррентно;*

$$\begin{aligned} H_n &= \lambda_\alpha(0), \\ H_{n-1} &= \lambda_\alpha(H_n), \\ &\cdots \\ H_1 &= \lambda_\alpha(H_2), \end{aligned}$$

функция λ_α определена формулой

$$\lambda_\alpha(x) = \operatorname*{Max_\alpha}_{1 \le i \le m} \left[h_i + r_i x \right],$$

здесь функция Max_α определена формулой;

$$\operatorname*{Max_\alpha}_{i} \{h_i\} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} h_{i_j}, \quad \text{где } h_{i_1} \ge h_{i_2} \ge h_{i_3} \ge \ \ldots \ge h_{i_m}, \quad p = [m\alpha] \text{ -- целая часть } m\alpha.$$

Величину $\operatorname*{Max_\alpha}_{i} \{h_i\}$ назовем верхним α-средним для числового семейства $\{h_i\}$, а функцию λ_α – верхней α-средней семейства линейных функций. Доказательство проведем индукцией по k. Для $k = n$ и $k < n$ уравнения Беллмана на функцию $Z_k^*(\xi_{k-1})$ соответственно примут вид;

$$\begin{aligned} Z_n^*(\xi_{n-1}) &= \max_{x_{ni} = \frac{\xi_{n-1}}{p} \vee 0;, \ x_{n1} + \ldots + x_{nm} = \xi_{n-1}} (h_1 \cdot x_{n1} + \ldots + h_m \cdot x_{nm}) = \\ &= \operatorname*{Max_\alpha}_{i} \{h_i\} \xi_{n-1} = H_n \xi_{n-1} \\ Z_k^*(\xi_{k-1}) &= \max_{x_{ki} = \frac{\xi_{k-1}}{p} \vee 0; \ x_{k1} + \ldots + x_{km} = \xi_{k-1}} \big(h_1 \cdot x_{k1} + \ldots + h_m \cdot x_{km} + Z_{k+1}^*(\xi_k) \big), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} Z_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{x_{ki} = \frac{\xi_{k-1}}{p} \vee 0; \ x_{k1} + \ldots + x_{km} = \xi_{k-1}} & [h_1 \cdot x_{k1} + \ldots + h_m \cdot x_{km} + \\ + H_{k+1} \cdot (r_1 \cdot x_{k1} + \ldots + r_m \cdot x_{km})] &= \operatorname*{Max_\alpha}_{i} (h_i + H_{k+1} \cdot r_i) \cdot \xi_{k-1}. \end{aligned}$$

Следовательно решение уравнений Беллмана сводится к рекуррентному нахождению коэффициентов H_k

$$\begin{aligned} H_n &= \operatorname*{Max_\alpha}_{i} \{h_i\}, \\ &\ldots, \\ H_k &= \operatorname*{Max_\alpha}_{i} (h_i + H_{k+1} \cdot r_i), \\ &\ldots, \\ H_1 &= \operatorname*{Max_\alpha}_{i} (h_i + H_2 \cdot r_i). \end{aligned}$$

Вводя вспомогательную функцию $\lambda_\alpha(x) = \underset{i}{\mathrm{Max}_\alpha}\,(h_i + x \cdot r_i)$ – верхнюю α-среднею семейства линейных функций, получим искомое утверждение.

Замечание. *В частности если* $\alpha = \frac{1}{m}$, *то* $\underset{i}{\mathrm{Max}_\alpha}\,\{h_i\}$ *будет обычный максимум чисел* $\{h_i\}$, *а функция*

$$\lambda_{1/m} = \lambda(x) = \max_i\{h_i + r_i x\},$$

верхняя огибающая семейства линейных функций. При $\alpha = 1$ *величина* $\underset{i}{\mathrm{Max}_\alpha}\,\{h_i\}$ *есть среднее значение этих чисел, а функция* $\lambda_1(x) = \dfrac{1}{m}\sum_i\{h_i + r_i x\}$ – *среднее семейства линейных функций. Причем в случае* $\alpha = 1$ *отбора предприятий не происходит, они все будут участвовать в производстве.*

Замечание. *Многомерная линейная модель с ограничениями распределения ресурсов может быть обобщена на случай, когда параметры предприятий меняются с течением времени. В этом случае функция* $\lambda_{\alpha,k}$ *будет зависеть от года* k. *Коэффициенты* H_k *выражаются через эти функции по формулам* $H_n = \lambda_{\alpha,n}(0)$, $H_{n-1} = \lambda_{\alpha,n-1}(\lambda_{\alpha,n}(0))$, *и.т.д.* На рисунке, построенном с помощью математического пакета Matlab, изображены графики функций; $\lambda(x)$ – верхней огибающей семейства линейных функций (50 функций), $\lambda_{0.1}(x)$ – верхней средней соответствующей уровню $\alpha = 0.1$ и процесс построения последовательности коэффициентов H_4, H_3, H_2, H_1.

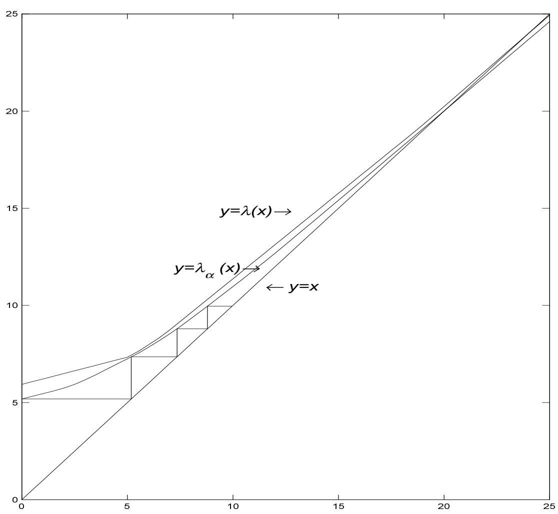

Рис. 1

Теорема. *Функция* $\lambda_\alpha(x)$ *будет выпуклой вниз кусочно-линейной функцией, ее производные (левая и правая) удовлетворяют неравенствам*

$$\min_i r_i \le \lambda'_{\alpha,left}(x) \le \lambda'_{\alpha,right}(x) \le \max_i r_i$$

Доказательство. Предварительно докажим следующие свойства функции Max_α:

1. Если $\forall i\{a_i \ge b_i\}$, то $\underset{i}{\mathrm{Max}_\alpha}\{a_i\} \ge \underset{i}{\mathrm{Max}_\alpha}\{b_i\}$.
2. Если $\mu \ge 0$, то $\underset{i}{\mathrm{Max}_\alpha}\{\mu a_i\} = \mu\,\underset{i}{\mathrm{Max}_\alpha}\{a_i\}$.
3. Для любой перестановки σ индексов $\{1, 2, \ldots, m\}$ такой, что $\sigma(k) = i_k$ выполняется неравенство
$$\underset{i}{\mathrm{Max}_\alpha}\{a_i\} \ge \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} a_{i_k}.$$
4. $\underset{i}{\mathrm{Max}_\alpha}\{a_i + b_i\} \le \underset{i}{\mathrm{Max}_\alpha}\{a_i\} + \underset{i}{\mathrm{Max}_\alpha}\{b_i\}$.

Первые три свойства следуют непосредственно из определения Max_α, проверим справедливость последнего свойства. Не ограничивая общности можно считать, что $a_1+b_1 \geq a_2+b_2 \geq \ldots \geq a_p+b_p \geq \ldots \geq a_m+b_m$. Тогда из 3-его свойства следует искомое неравенство;

$$\underset{i}{\mathrm{Max}}_\alpha\{a_i+b_i\} = \tfrac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\{a_i+b_i\} = \tfrac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} a_i + \tfrac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} b_i \leq \mathrm{Max}_{\alpha i}\{a_i\} + \mathrm{Max}_{\alpha i}\{b_i\}.$$

Перейдем к доказательству теоремы. Введем для краткости обозначение

$$l_i(x) = h_i + r_i x.$$

Пусть x, y произвольные точки области определения функции $\lambda_\alpha(x) = \underset{i}{\mathrm{Max}}_\alpha\, l_i(x)$. Для любого $0 \leq \mu \leq 1$ имеем неравенство

$$\lambda_\alpha((1-\mu)x+\mu y) = \underset{i}{\mathrm{Max}}_\alpha\,[l_i((1-\mu)x+\mu y)]$$
$$\leq \underset{i}{\mathrm{Max}}_\alpha\,[l_i((1-\mu)x)] + \underset{i}{\mathrm{Max}}_\alpha\,[l_i(\mu y)] =$$
$$= (1-\mu)\,\underset{i}{\mathrm{Max}}_\alpha\,[l_i(x)] + \mu\,\underset{i}{\mathrm{Max}}_\alpha\,[l_i(y)] =$$
$$= (1-\mu)\lambda_\alpha(x) + \mu\lambda_\alpha(y),$$

из которого следует выпуклость вниз функции λ_α.

Замечание. *Из доказательства теоремы следует, что она верна (в части выпуклости вниз) для любого конечного набора выпуклых вниз функций $l_i(x)$.*

Основываясь на полученной геометрической интерпретации решения введем следующее определение:

Определение. *Групповым коэффициентом эффективности набора τ из p предприятий, $\tau = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$, назовем решение уравнения $x = \dfrac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}(h_{i_k} + r_{i_k}x)$, т. е. число*

$$P_\tau = \frac{\dfrac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} h_{i_k}}{1 - \dfrac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} r_{i_k}}.$$

Из геометрических соображений очевидно утверждение:

Теорема. *Для многомерной линейной модели распределения ресурсов с ограничением справедливы утверждения;*

$$\underset{i}{\mathrm{Max}}_\alpha h_i \leq H_1 \leq \max_\tau P_\tau,$$
$$\lim_{n\to\infty} H_1 = \max_\tau P_\tau.$$

Замечание. *Линейная модель с ограничениями позволяет учесть также величину объема ресурса которое может освоить предприятие за год. Для этого достаточно каждому предприятию приписать вес – натуральное число. Другими словами если, например, предприятие имеет вес 3, то нужно заменить его тремя предприятиями веса 1.*

Список литературы

[1] Беллман Р. *Динамическое программирование* Изд-во ИЛ, Москва, 1960 г.

[2] Вагнер Г. *Основы исследования операций* М.: Мир, 1973 г.

[3] *Исследование операций:* Т.1. Пер. с англ. Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М.: Мир, 1981 г.

[4] Карымов В.Р., Славская М.В.*Многомерная линейная модель распределения ресурсов.* Математическое образовани на Алтае. Труды региональной научно-методической конференции. Изд-во АлГТУ, Барнаул, 33-36 (2001).

[5] Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. *Исследование операций в экономике*, ЮНИТИ, 1997 г.

[6] Вентцель Е.С. *Исследование операций*, Москва, 1972 г.

[7] Оскорбин Н.М., Суханов В.А. *Исследование операций и теотия игр в элементарном изложении; Текст лекций.* – Барнаул: изд. Алт. Ун-та, 1987. – 62 с.

[8] Потемкин В.Г. *MATLAB справочное пособие*, ДИАЛОГ-МИФИ, 1997 г.