

Содержание

МАТЕМАТИКА

<i>Дудкин А.А.</i> Ортоцентрический симплекс и выход в объемлющее пространство. . .	5
<i>Завьялова Л.А.</i> Преобразование O_δ - множеств при инверсии.	8
<i>Кузьмина А.С.</i> Об армендеризовских и косых армендеризовских кольцах.	13
<i>Кыров В.А.</i> Формулы Герона некоторых феноменологически симметричных геометрий.	20
<i>Михайличенко Г.Г.</i> Групповой аналог классификационных задач в теории физических структур.	25
<i>Поликанова И.В.</i> Верхние и нижние пределы многозначных отображений в пространствах с аксиомами счетности.	35
<i>Раков А.Е.</i> Перечисление многогранников.	41
<i>Родионов Е.Д., Славский В.В.</i> Дифференциальные операторы на группе Гейзенберга.	44
<i>Сидоров А.С.</i> Инвариантные римановы метрики Эйнштейна на обобщенных пространствах Уоллача.	48
<i>Чеботарев С.В., Чеботарева Г.А.</i> О эквивалентности конечных сумм от функций случайных величин.	51
<i>Чеботарев С.В.</i> О существовании стационарных последовательностей с эквивалентной суммой случайных величин и их свойства.	56
<i>Чешкова М.А.</i> К геометрии поверхностей, имеющих плоские линии кривизны. . . .	63
<i>Шевелев В.В.</i> Топология локально минимальных сетей натянутых на выпуклую пятиугольную границу.	66

ФИЗИКА

<i>Ананьева Е.С., Насонов А.Д., Маркин В.Б.</i> Возможность прогнозирования вязкоупругих свойств полимерного композита с комбинированным наполнителем. . . .	69
<i>Голубь П.Д.</i> Электромеханические свойства полимеров.	74
<i>Коваленко А.А., Скурыдина Е.М., Пожидаева О.В.</i> Исследование молекулярной подвижности сложных эфиров целлюлозы.	78
<i>Скурыдин Ю.Г., Скурыдина Е.М.</i> Композиционный материал из растительных отходов без связующих средств.	83

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

<i>Ицук А.М.</i> Тестовые задания по римановой геометрии и тензорному анализу. . . .	87
<i>Маусымбаев С.С., Павлов И.В.</i> Применение компьютерных моделей в спецкурсе "Движение заряженных частиц в электромагнитных полях"	90
<i>Ореховская А.П.</i> Из опыта обучения студентов доказательству неравенств.	93

<i>Токарева Л.Н. Особенности учетной политики бюджетного учреждения в период реформирования бухгалтерского учета.....</i>	95
РЕФЕРАТЫ	104
ПЕРСОНАЛИИ	108
ХРОНИКА.....	111
ИЗДАНО В БГПУ.....	112
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	115

ОРТОЦЕНТРИЧЕСКИЙ СИМПЛЕКС И ВЫХОД В ОБЪЕМЛЮЩЕЕ ПРОСТРАНСТВО

В литературе по элементарной геометрии можно найти очень много интересных свойств треугольника и тетраэдра. Их обобщение на случай симплекса многомерного евклидова пространства может служить источником тем дипломных и курсовых работ по математике. Особенно это актуально для будущих учителей математики. В литературе по многомерной геометрии этот вопрос практически не затрагивается и для изучения свойств симплексов студентам нужны некие "мостики", соединяющие традиционную теорию многомерных пространств с методами доказательства теорем о многогранниках в этих пространствах. Основная цель настоящей работы - предложить один из таких "мостиков": будут найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы для данного симплекса можно было выбрать прямоугольную декартову систему координат (ПДСК), на осях которой оказались бы все вершины симплекса. Выясняется, что класс таких симплексов достаточно широк (см. теорему в конце работы). Например, на "школьной" плоскости в него попадают все остроугольные и, конечно, прямоугольные треугольники. Доказательство соответствующей теоремы конструктивное, т.е. из него ясно, как именно нужно строить такую ПДСК для данного симплекса. Поскольку число вершин симплекса на единицу больше, чем его размерность, потребуется выход в объемлющее пространство (за исключением тривиального случая прямоугольного симплекса). Будет также установлен ряд свойств любых ортоцентрических симплексов, большинство из которых мне не доводилось встречать даже на уровне треугольников и тетраэдров. Напомним: симплекс называется ортоцентрическим, если все его высоты пересекаются в одной точке - ортоцентре симплекса [2, с.176].

Лемма 1. Пусть C^n - n -мерный симплекс $(n + 1)$ -мерного евклидова пространства E^{n+1} , где $n > 1$. Если нашлась такая ПДСК в E^{n+1} , что все вершины симплекса C^n оказались на ее осях координат, то C^n - ортоцентрический симплекс.

Доказательство. Рассмотрим два возможных случая: 1) начало координат оказалось одной из

вершин симплекса; 2) начало координат не совпало ни с одной из вершин симплекса. В первом случае начало координат и есть точка пересечения всех высот симплекса, т.е. он - ортоцентрический. Во втором случае рассмотрим новый $(n + 1)$ -мерный симплекс, вершины которого - все вершины симплекса C^n и начало координат. Все его высоты пересекаются в начале координат, т.е. он - ортоцентрический. Любая грань размерности $k > 1$ ортоцентрического симплекса сама является ортоцентрическим симплексом [3, с.386]. Поэтому C^n - ортоцентрический симплекс. Лемма доказана.

Как известно, всякий треугольник - ортоцентрический симплекс. Среди треугольников различают остроугольные, прямоугольные, тупоугольные. Нам понадобится определить аналогичные виды ортоцентрических симплексов любой размерности.

Лемма 2. Для всякого ортоцентрического симплекса $A_1A_2...A_{n+1}$ с ортоцентром H и высотами A_kH_k выполняется равенство скалярных произведений: $\overline{A_kH} \cdot \overline{A_kH_k} = \overline{A_kA_i} \cdot \overline{A_kA_j}$, где i, j, k - различные.

Доказательство. $\overline{A_kA_i} \cdot \overline{A_kA_j} = (\overline{A_kH} + \overline{HA_i}) \cdot \overline{A_kA_j} = \overline{A_kH} \cdot \overline{A_kA_j} + \overline{HA_i} \cdot \overline{A_kA_j} = \overline{A_kH} \cdot \overline{A_kA_j} = \overline{A_kH} \cdot (\overline{A_kH_k} + \overline{H_kA_j}) = \overline{A_kH} \cdot \overline{A_kH_k} + \overline{A_kH} \cdot \overline{H_kA_j} = \overline{A_kH} \cdot \overline{A_kH_k}$. Лемма доказана.

Скалярное произведение $\overline{A_kH} \cdot \overline{A_kH_k}$ обозначим через a_k .

Следствие 1. Выполняются равенства $a_k = \overline{A_kH} \cdot \overline{A_kH_k} = \overline{A_kA_i} \cdot \overline{A_kA_j}$.

Следствие 2. При каждой вершине A_k ортоцентрического симплекса $A_1A_2...A_{n+1}$ все плоские углы одного типа: либо острые, либо прямые, либо тупые. Если $a_k > 0$, то все углы острые, если $a_k = 0$, то все углы прямые, если $a_k < 0$, то все углы тупые.

Справедливость следствия 2 непосредственно вытекает из следствия 1.

Вершину ортоцентрического симплекса будем называть *вершиной острых (прямых, тупых) углов*, если все плоские углы симплекса при этой вершине являются острыми (прямыми, тупыми соответственно).

Следствие 3. Все вершины ортоцентрического симплекса, за исключением разве что од-

ной, являются вершинами острых углов.

Действительно, если бы нашлись две вершины не острых углов, то любая двумерная грань симплекса, содержащая эти вершины, была бы треугольником, имеющим не более одного острого угла, что невозможно.

Ортоцентрический симплекс назовем *остроугольным*, если все его вершины - вершины острых углов; *прямоугольным* - если он имеет вершину прямых углов; *тупоугольным* - если он имеет вершину тупых углов.

Лемма 3. Для всякого ортоцентрического симплекса $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ с ортоцентром H и высотами A_kH_k выполняется равенство скалярных произведений: $\overline{A_kH} \cdot \overline{HH_k} = -\overline{HA_k} \cdot \overline{HA_i}$, где $i \neq k$.

Доказательство. $\overline{HA_k} \cdot \overline{HA_i} = \overline{HA_k}(\overline{HH_k} + \overline{H_kA_i}) = -\overline{A_kH} \cdot \overline{HH_k} + \overline{HA_k} \cdot \overline{H_kA_i} = -\overline{A_kH} \cdot \overline{HH_k}$. Лемма доказана.

Следствие 1. Скалярное произведение $\overline{HA_k} \cdot \overline{HA_i}$ ($i \neq k$) не зависит от i .

Следствие 2. Скалярное произведение $\overline{HA_k} \cdot \overline{HA_i}$ ($i \neq k$) не зависит от k .

Следствие 3. Скалярное произведение $\overline{A_kH} \cdot \overline{HH_k}$ не зависит от k .

Учитывая следствие 3, введем обозначение для константы: $c = \overline{A_kH} \cdot \overline{HH_k}$.

Следствие 4. Выполняется равенство $\overline{HA_k} \cdot \overline{HA_i} = -c$ при $i \neq k$.

Следствие 5. Выполняется равенство $a_k = c + \overline{A_kH}^2$.

Действительно, $a_k = \overline{A_kH} \cdot \overline{A_kH_k} = \overline{A_kH}(\overline{A_kH} + \overline{HH_k}) = \overline{A_kH}^2 + c$.

Лемма 4. Для всякого ортоцентрического симплекса выполняется равенство $\frac{1}{c} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k}$, если все $a_k \neq 0$.

Доказательство. Каждая из барицентрических координат ортоцентра H симплекса $C^n = A_1A_2 \dots A_{n+1}$ (относительно этого симплекса) - отношение ориентированных объемов двух симплексов с общим основанием - одной из граней симплекса C^n ; при этом вершина первого - точка H , а вторым является сам симплекс C^n [1, с. 126]. Учитывая, что основание общее, можно отношение ориентированных объемов заменить отношением ориентированных высот к общему основанию, т.е. отношением коллинеарных векторов: $\overline{HH_k} : \overline{A_kH_k}$. Поскольку сумма барицентрических координат равна 1 [1, с. 125], то имеем равенство: $\sum (\overline{HH_k} : \overline{A_kH_k}) = 1$. Отсюда получим: $\sum \frac{\overline{A_kH} \cdot \overline{HH_k}}{\overline{A_kH} \cdot \overline{A_kH_k}} = 1$. ($\overline{A_kH} \neq 0$ согласно, например, следствию 1 леммы 2). Зная, что ортоцентр H лежит на любой из высот A_kH_k , можно это равенство заменить

следующим: $\sum (c : a_k) = 1$.

Откуда получаем искомое равенство. Лемма доказана.

Лемма 5. Ортоцентрический симплекс C^n является

1) остроугольным тогда и только тогда, когда константа $c > 0$;

2) прямоугольным - тогда и только тогда, когда $c = 0$;

3) тупоугольным - тогда и только тогда, когда $c < 0$.

Доказательство. Очевидно, часть 2) леммы - следствие ее частей 1) и 3).

Симплекс C^n остроугольный тогда и только тогда, когда $a_k > 0$ при всех k . Из леммы 4, если все $a_k > 0$, то $c > 0$. Из следствия 5 леммы 3, если $c > 0$, то все $a_k > 0$. Часть 1) леммы доказана.

Осталось доказать часть 3). Симплекс C^n тупоугольный тогда и только тогда, когда $a_k < 0$ при некотором k . Из этого неравенства и следствия 5 леммы 3 найдем: $c < 0$. Пусть теперь $c < 0$. Для доказательства леммы отсюда достаточно получить: симплекс - тупоугольный. Согласно части 1), он не может быть остроугольным. Теперь достаточно доказать, что при $c < 0$ он не может быть прямоугольным. У прямоугольного симплекса одна из вершин - вершина прямых углов, причем именно она - ортоцентр. Поэтому будь симплекс прямоугольным, получили бы: $a_k = 0$ и $A_k = H$ при некотором k . Отсюда, согласно следствию 5 леммы 3, имели бы: $c = 0$, что невозможно. Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть C^n - n -мерный симплекс ($n + 1$)-мерного евклидова пространства E^{n+1} , где $n > 1$. Если найдется такая ПДСК в E^{n+1} , что все вершины симплекса C^n окажутся на ее осях координат, то C^n - остроугольный или прямоугольный ортоцентрический симплекс.

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно доказать, что C^n не может быть тупоугольным ортоцентрическим. Предположим противное: симплекс тупоугольный ортоцентрический и нашлась такая ПДСК в E^{n+1} , что все вершины симплекса C^n оказались на ее осях координат. Тогда в силу следствия 3 леммы 2 вершина симплекса C^n не может оказаться началом координат. Рассмотрим новый ($n + 1$)-мерный симплекс C^{n+1} , вершины которого - все вершины симплекса C^n и начало координат. Все его высоты пересекаются в начале координат, т.е. он - ортоцентрический, а начало координат - его вершина прямых углов. Причем вершина тупых углов симплекса C^n будет таковой и для симплекса C^{n+1} (согласно следствию 2 леммы 2).

Получили ортоцентрический симплекс C^{n+1} , у которого есть вершина прямых углов и вершина тупых углов, что противоречит следствию 3 леммы 2. Лемма доказана.

Теорема. Пусть C^n - n -мерный симплекс $(n + 1)$ -мерного евклидова пространства E^{n+1} , где $n > 1$. Все вершины симплекса C^n могут быть расположены на осях координат некоторой ПДСК в E^{n+1} тогда и только тогда, когда C^n - остроугольный или прямоугольный ортоцентрический симплекс.

Доказательство. Учитывая лемму 6 и определение прямоугольного симплекса, доказать достаточно лишь следующее: если ортоцентрический симплекс $C^n = A_1A_2 \dots A_{n+1}$ - остроугольный, то найдется такая точка X (начало координат) вне плоскости этого симплекса в E^{n+1} , что $\overline{XA_i} \cdot \overline{XA_j} = 0$ при всех $i \neq j$. Покажем, что этим требованиям удовлетворяет точка X , расположенная на перпендикуляре к плоскости

симплекса $A_1A_2 \dots A_{n+1}$, проведенном из его ортоцентра H так, чтобы выполнялось равенство $XH^2 = c$. Сначала заметим, что такая точка существует, поскольку $c > 0$ (см. лемму 5). Остается проверить: для построенной так точки X выполняются равенства $\overline{XA_i} \cdot \overline{XA_j} = 0$. Действительно, имеем $\overline{XA_i} \cdot \overline{XA_j} = (\overline{XH} + \overline{HA_i})(\overline{XH} + \overline{HA_j}) = XH^2 + \overline{XH}(\overline{HA_i} + \overline{HA_j}) + \overline{HA_i} \cdot \overline{HA_j}$. По построению точки X : $XH^2 = c$. Согласно следствию 4 леммы 3: $\overline{HA_i} \cdot \overline{HA_j} = -c$. Поскольку вектор \overline{XH} перпендикулярен плоскости симплекса $A_1A_2 \dots A_{n+1}$, а точки H, A_i, A_j лежат в ней, то $\overline{XH}(\overline{HA_i} + \overline{HA_j}) = 0$. Поэтому $\overline{XA_i} \cdot \overline{XA_j} = 0$. Теорема доказана.

Замечание. Можно доказать, что на роль начала координат (точки X) не могут претендовать иные точки в E^{n+1} , кроме тех двух, что "построены" в ходе доказательства теоремы (а эти две точки будут симметричны относительно плоскости симплекса $A_1A_2 \dots A_{n+1}$, очевидно).

Библиографический список

1. Балк М. Б., Болтянский В. Г. Геометрия масс. М.: Наука, 1987.
2. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.
3. Энциклопедия элементарной математики. Кн.V. М.: Наука, 1966.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ O_δ - МНОЖЕСТВ ПРИ ИНВЕРСИИ

Введем обозначения. E^n — n -мерное евклидово пространство. Точки евклидова пространства E^n , будем обозначать строчными буквами латинского алфавита a, b, \dots, x, y , а подмножества этого пространства — заглавными буквами A, B, \dots, X, Y . Если $x, y \in E^n$, то $|xy|$ — евклидово расстояние между точками x и y ; если $x \neq y$, то $[xy]$ — луч с началом в точке x , проходящий через точку y , $[xy]$ — замкнутый прямолинейный отрезок, соединяющий точки x и y . Если $F \in E^n$, то $\text{int}F$, ∂F соответственно внутренность и граница множества F . $B(x, \delta)$ — замкнутый шар с центром в точке x радиуса δ .

1. Определение O_δ — множества было введено Ю.Г. Решетняком в статье «Об одном обобщении выпуклых поверхностей» [2]. Изучаемые множества характеризуются тем свойством, что каждой граничной точке множества можно коснуться шаром данного радиуса $\delta > 0$, причем внутри этого шара точек множества нет. Кроме того, предполагается выполнение еще ряда условий, которые мы сформулируем позже.

Приведем определения и некоторые сведения, относящиеся к O_δ — множествам в n -мерном евклидовом пространстве.

Определение 1. Шар (x, δ) называется опорным к множеству $F \subset E^n$ в точке $y \in F$, если $y \in \partial B(x, \delta)$, а внутренность шара $B(x, \delta)$ не содержит точек множества F .

Определение 2. Множество $F \subset E^n$ называется O_δ — множеством, если F замкнуто и для каждой его точки x задана некоторая система $\sigma_\delta(x)$ замкнутых шаров радиуса $\delta > 0$, содержащих точку x , причем системы $\sigma_\delta(x)$ обладают следующими свойствами:

1. если шар $B \in \sigma_\delta(x)$, то никакая внутренняя точка шара B не принадлежит множеству F ;
2. пересечение всех шаров системы $\sigma_\delta(x)$ имеет хотя бы одну внутреннюю точку;
3. если $x_j \in F$, шар $B_j \in \sigma_\delta(x_j)$, и при $j \rightarrow \infty$ $x_j \rightarrow x_0$, $B_j \rightarrow B_0$, то $B_0 \in \sigma_\delta(x)$. [2, с.382]

Определим класс множеств O_Δ условием:

$F \in O_\Delta$, если множество F является O_δ — множеством при некотором $\delta > 0$.

В силу определения 1 и условия 1 определения 2 имеем, что шары, принадлежащие системе $\sigma_\delta(x)$, являются опорными шарами к множеству F в точке x .

Каждый опорный шар $B \in \sigma_\delta$ определяет два замкнутых полупространства, ограниченных гиперплоскостью, касательной к шару B в точке x . Полупространство, содержащее шар B назовем верхним, а другое — нижним.

Пересечение всех нижних полупространств в точке x есть замкнутый выпуклый конус, который обозначим через $T(x)$ и назовем опорным к множеству F в точке x . [1, с.46]

Контингентия в каждой внутренней точке x произвольной O_δ — гиперповерхности совпадает с поверхностью конуса $T(x)$ ([2], теорема 2). Поэтому конусы $T(x)$, и конус $\bar{T}(x)$ определены однозначно в каждой точке O_δ — гиперповерхности.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Для всякого ограниченного O_δ — множества F существует число δ_1 , $0 < \delta_1 < \delta$, такое, что, если $\sigma_{\delta_1}(x)$ — совокупность всех замкнутых шаров радиуса δ_1 , проходящих через точку x и не имеющих общих внутренних точек с конусом $T(x)$, то системы $\sigma_{\delta_1}(x)$ удовлетворяют условиям 1 — 3 определения 2. [2, с.384]

Число δ_1 , определенное в теореме 1, называется радиусом обката O_δ — множества F . [2, с.386]

Замечание. Пусть δ_1 — радиус обката O_δ — множества F ; $0 < \delta_2 < \delta_1$ и $\sigma_{\delta_2}(x)$ — совокупность всех замкнутых шаров радиуса δ_2 , проходящих через точку x и не имеющих общих внутренних точек с конусом $T(x)$. Нетрудно убедиться в том, что системы $\sigma_{\delta_2}(x)$ удовлетворяют условиям 1 — 3 определения 2, и определяемые ими опорные конусы совпадают с конусами $T(x)$. Таким образом, без ограничения общности, можно считать, что системы опорных шаров, определяющие O_δ — множество F , обладают указанными свойствами априори.

Основной результат работы состоит в том, что множество класса O_Δ переводится инверсией во множество класса O_Δ .

2. В этом пункте речь будет идти о свойствах инверсии и отображении лучей, порождаемом инверсией.

Пусть в евклидовом пространстве E^n фиксирована некоторая сфера с центром в точке s радиуса r .

Определение 3. Инверсией (пространства E^n) относительно сферы называется такое преобразование, которое переводит всякую

точку $x \in E^n$ за исключением центра сферы (точки c) радиуса r , в такую точку x' луча $[cx)$, для которой

$$|cx'| = \frac{r^2}{|cx|}. [3, .482]$$

Пусть $E_c^n = E^n \setminus \{c\}$; $i_{c,r} : E_c^n \rightarrow E_c^n$ — инверсия с центром c радиуса r .

Из определения инверсии следует, что

$$\vec{cx'} = \frac{r^2}{c\vec{x}^2} \cdot c\vec{x},$$

где $x' = i_{c,r}(x)$.

Выясним, как инверсия преобразует шары.

Утверждение 1. Шар, не содержащий центр инверсии, переходит при инверсии в шар, также не содержащий центр инверсии.

Утверждение 2. Если центр инверсии является внутренней точкой шара, то инверсия преобразует шар во внешность шара.

Утверждение 3. Если центр инверсии является граничной точкой шара, то инверсия преобразует шар в полупространство.

Доказательство утверждений 1–3.

Пусть $B(a, d)$ — произвольный шар пространства E^n ; \vec{a} — радиус — вектор точки a , \vec{x} — радиус — вектор произвольной точки шара $B(a, d)$. Запишем неравенство, определяющее шар $B(a, d)$

$$(\vec{x} - \vec{a})^2 - d^2 \leq 0. \quad (1)$$

Доказательство проведем непосредственно для инверсии $\vec{x'} = \frac{r^2}{\vec{x}^2} \cdot \vec{x}$ с центром в начале координат (точке c) и радиусом r .

В силу инволютивности инверсии будем иметь

$$\vec{x} = \frac{r^2}{\vec{x}'^2} \cdot \vec{x}' \quad (2)$$

Если в неравенстве (1) заменим \vec{x} выражением (2), то получим уравнение образа B' шара $B(a, d)$ при инверсии (2)

$$\left(\frac{r^2}{\vec{x}'^2} \cdot \vec{x}' - \vec{a} \right)^2 - d^2 \leq 0.$$

После элементарных преобразований это неравенство приведем к виду

$$(\vec{a}^2 - d^2) \vec{x}'^2 - 2r^2 < \vec{a}, \vec{x}' > + r^4 \leq 0,$$

где $< \vec{a}, \vec{x}' >$ скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{x}' .

Обозначив $\vec{a}^2 - d^2$ через p , перепишем полученное неравенство в виде

$$p\vec{x}'^2 - 2r^2 < \vec{a}, \vec{x}' > + r^4 \leq 0. \quad (3)$$

Возможны три случая:

1. Если $p > 0$, то $c \notin B(a, d)$. И неравенство (3) можно записать в виде

$$\vec{x}'^2 - \frac{2r^2}{p} < \vec{a}, \vec{x}' > + \frac{r^4}{p} \leq 0$$

или

$$\left(\vec{x}' - \frac{r^2}{p} \vec{a} \right)^2 \leq \frac{r^4(\vec{a}^2 - p)}{p^2}.$$

Подставив $p = \vec{a}^2 - d^2$ в последнее неравенство, запишем его так

$$\left(\vec{x}' - \frac{r^2}{\vec{a}^2 - d^2} \vec{a} \right)^2 \leq \frac{r^4 d^2}{(\vec{a}^2 - d^2)^2}. \quad (4)$$

Полученное неравенство (4) задает шар (не содержащий точку c) радиуса $\frac{r^2 d}{\vec{a}^2 - d^2}$ с центром в точке a^* , имеющей радиус — вектор $\frac{r^2}{\vec{a}^2 - d^2} \vec{a}$.

2. Если $p < 0$, то $c \in \text{int}B(a, d)$. Тогда неравенство (3), равносильное неравенству

$$\vec{x}'^2 - 2r^2 < \vec{a}, \vec{x}' > + r^4 \geq 0,$$

определяет внешность шара.

3. Если $p = 0$, то $c \in \partial B(a, d)$. В этом случае получим неравенство $< \vec{a}, \vec{x}' > - \frac{r^2}{2} \geq 0$, которое задает полупространство, не содержащее центр инверсии — точку c .

Утверждения 1–3 полностью доказаны.

Из доказательства утверждений 1–3 непосредственно вытекают два следующих утверждения.

Утверждение 4. Пусть инверсия $i_{c,r}$ преобразует шар $B(a, d)$, не содержащий центра инверсии, в шар $B'(a^*, d')$.

Тогда

1. Центр шара $B(a, d)$ не переходит в центр шара $B'(a^*, d')$ при инверсии $i_{c,r}$, то есть $a^* \neq a'$, где $a' = i_{c,r} a$.

2.

$$d' = \frac{r^2 d}{|ca|^2 - d^2}. \quad (4')$$

Утверждение 5. Внутренность и граница шара при инверсии переходят соответственно во внутренность и границу его образа.

Теорема 2. При инверсии $i_{c,r}$ опорный шар κ множеству $F \subset E^n$ в точке $y \in F$, не содержащий точку c , переходит в опорный шар κ множеству $i_{c,r}(F)$ в точке $i_{c,r}(y)$.

Доказательство.

Пусть B — опорный шар к множеству F в точке y . Заметим, что $i_{c,r}(B)$ есть шар, так как $c \notin B$. Поскольку $y \in B$ и $y \in F$, то $i_{c,r}(y) \in i_{c,r}(B)$ и $i_{c,r}(y) \in i_{c,r}(F)$. В силу утверждения 5, внутренность шара B при инверсии $i_{c,r}$ отображается во внутренность шара $i_{c,r}(B)$. Тогда $\text{int}(i_{c,r}(B)) \cap i_{c,r}(F) = \emptyset$, так как $\text{int}B \cap F = \emptyset$ (по определению опорного шара). Следовательно, $i_{c,r}(B)$ — опорный шар к множеству $i_{c,r}(F)$ в точке $i_{c,r}(y)$.

Теорема доказана.

Далее в этом пункте определим отображение лучей пространства E^n , порождаемое инверсией.

Пусть $L(E_c^n)$ — совокупность всех лучей пространства E^n , имеющих начала в точках, отличных от центра c .

Определим отображение лучей

$$\tilde{i}_{c,r} : L(E_c^n) \rightarrow L(E_c^n),$$

порождаемое инверсией $i_{c,r}$, следующим образом: каждому лучу t с началом в точке $x \in E_c^n$ и направляющим ортом \vec{t} поставим в соответствие луч t' с началом в точке $i_{c,r}(x)$ и направляющим ортом $\frac{i_x^*(\vec{t})}{\|i_x^*(\vec{t})\|}$, где $i_x^* : T_x(E_c^n) \rightarrow T_x(E_c^n)$ — индуцированное отображение касательных пространств в точке x , порождаемое инверсией.

Нетрудно доказать следующие свойства отображения $\tilde{i}_{c,r}$.

Свойство 1. *Отображение $\tilde{i}_{c,r}$ биективно.*

Свойство 2. *Отображение $\tilde{i}_{c,r}$ переводит лучи, исходящие из одной точки, в лучи, исходящие из одной точки.*

Свойство 3. *Отображение $\tilde{i}_{c,r}$ сохраняет углы между лучами, исходящими из одной точки.*

Свойство 4. *Отображение $\tilde{i}_{c,r}$ инволютивно.*

Свойство 5. *Отображение $\tilde{i}_{c,r}$ непрерывно.*

Теорема 3. *Пусть шар B не содержит центра инверсии $i_{c,r}$ и B' — его образ при этой инверсии.*

Тогда при отображении $\tilde{i}_{c,r}$ всякий луч, исходящий из граничной точки шара B и проходящий через центр этого шара, переходит в луч, исходящий из граничной точки шара B' и проходящий через центр шара B' .

Доказательство.

Пусть в пространстве E^n задана прямоугольная система координат $(c, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ с началом координат в точке c — центре инверсии $i_{c,r}$.

Рассмотрим шар B с центром в точке a , не содержащий центра инверсии $i_{c,r}$ — точку c ; и

луч t , который имеет начало в точке $x \in \partial B$ и проходит через точку a .

Пусть $x' = i_{c,r}(x)$, $B' = i_{c,r}(B)$ и $\tilde{t} = \tilde{i}_{c,r}(t)$. Заметим, что B' есть шар (по утверждению 1), центр которого обозначим a^* . Кроме того, $x' \in \partial B'$ (утверждение 5).

Пусть $\vec{t} = \vec{x}\vec{a}$ — направляющий вектор луча t и $i_x^*(\vec{t}) = \vec{t}'$. Тогда вектор t' является направляющим вектором луча \tilde{t} , исходящего из точки x' .

Докажем, что $a^* \in \tilde{t}$. Для этого покажем, что $\vec{t}' \uparrow \uparrow \vec{x}'\vec{a}^*$.

По формуле индуцированного отображения, определяемого инверсией, имеем

$$\vec{t}' = \frac{r^2}{\|\vec{x}\|^2} \left(\vec{t} - 2 \langle \vec{x}, \vec{t} \rangle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} \right),$$

где \vec{x} — радиус — вектор точки x , $\langle \vec{x}, \vec{t} \rangle$ — скалярное произведение векторов \vec{x} и \vec{t} . Нетрудно видеть, что

$$\vec{x}'\vec{a}^* = \vec{c}\vec{a}^* - \vec{c}\vec{x}'. \quad (5)$$

По определению инверсии $\vec{c}\vec{x}' = \frac{r^2}{\|\vec{c}\vec{x}\|^2} \vec{c}\vec{x}$. Заметим, что вектор $\vec{c}\vec{x}$ является радиус — вектором точки x . Тогда

$$\vec{c}\vec{x}' = \frac{r^2}{\|\vec{x}\|^2} \vec{x}. \quad (6)$$

Из доказательства утверждения 1 имеем, что центр шара B' (точка a^*) имеет радиус — вектор $\vec{c}\vec{a}^* = \frac{r^2}{\|\vec{c}\vec{a}\|^2 - \|\vec{x}\vec{a}\|^2} \vec{c}\vec{a}$.

Принимая во внимание, что $\vec{c}\vec{a} = \vec{x} + \vec{t}$, где $\vec{x} = \vec{c}\vec{x}$ и $\vec{t} = \vec{x}\vec{a}$, получим

$$\vec{c}\vec{a}^* = \frac{r^2}{(\vec{x} + \vec{t})^2 - \|\vec{t}\|^2} (\vec{x} + \vec{t}). \quad (7)$$

В равенстве (5) заменим векторы $\vec{c}\vec{a}^*$ и $\vec{c}\vec{x}'$ их выражениями (7) и (6):

$$\begin{aligned} \vec{x}'\vec{a}^* &= \frac{r^2}{(\vec{x} + \vec{t})^2 - \|\vec{t}\|^2} \cdot (\vec{x} + \vec{t}) - \frac{r^2}{\|\vec{x}\|^2} \cdot \vec{x} = \\ &= \frac{r^2}{\|\vec{x}\|^2 \cdot ((\vec{x} + \vec{t})^2 - \|\vec{t}\|^2)} \cdot ((\vec{x} + \vec{t}) \cdot \|\vec{x}\|^2 - \\ &\quad - \vec{x} \cdot (\vec{x} + \vec{t})^2 + \|\vec{t}\|^2 \cdot \vec{x}) = \\ &= \frac{r^2}{(\vec{x} + \vec{t})^2 - \|\vec{t}\|^2} \cdot \left(\vec{t} - 2 \cdot \langle \vec{x}, \vec{t} \rangle \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, $\overrightarrow{x'a^*} = \frac{\|\vec{x}\|^2}{(\vec{x}+\vec{t})^2 - \|\vec{t}\|^2} \cdot \vec{t}$.

Так как $c \notin B$, то $\|\vec{c}\vec{a}\|^2 - \|\vec{a}\vec{x}\|^2 > 0$, то есть $(\vec{x} + \vec{t})^2 - \|\vec{t}\|^2 > 0$. Тогда $\frac{\|\vec{x}\|^2}{(\vec{x}+\vec{t})^2 - \|\vec{t}\|^2} > 0$. Поэтому $\overrightarrow{x'a^*} \uparrow \vec{t}$. Следовательно, луч \vec{t} проходит через точку a^* , являющуюся центром шара B' .

Таким образом, теорема доказана.

3. Прежде чем перейти к основному результату, докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть $B(x, \delta)$ - опорный шар к множеству F в точке y , не содержащий центра c инверсии $i_{c,r}$, и шар $B'(x^*, \delta')$ его образ при инверсии $i_{c,r}$.

Тогда радиусы δ и δ' шаров $B(x, \delta)$ и $B'(x^*, \delta')$ связаны неравенством

$$\delta' > \frac{r^2 \cdot \delta}{(|cy| + \delta)^2}.$$

Доказательство.

По условию леммы шар $B'(x^*, \delta')$ является образом шара $B(x, \delta)$ при инверсии $i_{c,r}$, центр которой не принадлежит шару $B(x, \delta)$. Поэтому, в силу утверждения 4, радиус шара $B'(x^*, \delta)$ вычисляется по формуле $\delta' = \frac{r^2 \delta}{|cx|^2 - \delta^2}$.

Очевидно, что $\delta' > \frac{r^2 \delta}{|cx|^2}$. В треугольнике sxy имеем $|cx| < |cy| + |yx|$ или, учитывая, что $|xy| = \delta$, получим

$$|cx| < |cy| + \delta. \quad (8)$$

Заметим, что треугольник sxy может вырождаться в отрезок. Тогда возможны еще два случая:

1. $|cx| = |cy| + \delta$, если $y \in [cx]$.
2. $|cx| = |cy| - \delta$, если $x \in [cy]$.

Во втором случае также справедливо неравенство (8), так как $|cy| - \delta < |cy| + \delta$.

Учитывая все три случая, получим $|cx| \leq |cy| + \delta$, откуда $|cx|^2 \leq (|cy| + \delta)^2$.

Тогда будем иметь

$$\delta' > \frac{r^2 \cdot \delta}{|cx|^2} \geq \frac{r^2 \cdot \delta}{(|cy| + \delta)^2}.$$

Тем самым получили требуемую оценку

$$\delta' > \frac{r^2 \cdot \delta}{(|cy| + \delta)^2}.$$

Лемма доказана.

Теорема. Образом компактного множества $F \subset E^n$ класса O_Δ при инверсии с центром, не принадлежащим множеству F , является множество класса O_Δ .

Доказательство.

Пусть F - компактное множество класса O_Δ , радиус обката которого равен δ_1 ; ρ — расстояние от центра инверсии $i_{c,r}$ до множества F . Положим $\delta = \min \{\delta_1, \frac{1}{2}\rho\}$.

Совокупность всех опорных шаров радиуса δ к множеству F в точке $y \in F$ обозначим через $\sigma(y)$, а совокупность всех опорных шаров к множеству F через σ .

Согласно замечанию, системы $\sigma(y)$ удовлетворяют условиям 1–2 определения 2. Очевидно, что точка $c \notin cl(\bigcup \sigma)$. Тогда образы всех шаров совокупности σ при инверсии $i_{c,r}$ будут опорными шарами к множеству $i_{c,r}(F) = F'$ (теорема 2). Совокупность образов шаров из системы $\sigma(y)$ обозначим через $\sigma'(y')$, где $y' = i_{c,r}(y)$. Покажем, что радиусы всех этих шаров из системы $\sigma'(y')$ ограничены снизу некоторым числом $\delta^* > 0$.

Радиус образа каждого шара $B(x, \delta) \in \sigma(y)$ при инверсии $i_{c,r}$, согласно лемме, оценивается неравенством

$$\delta' > \frac{r^2 \delta}{(|cy| + \delta)^2}.$$

Пусть $\lambda = \sup_{y \in F} \{|cy|\}$. Ввиду ограниченности множества F и в силу условия $c \notin cl(\bigcup \sigma)$ выполняется $0 < \lambda < +\infty$. Тогда число $\delta^* = \frac{r^2 \delta}{(\lambda + \delta)^2}$ будет требуемым:

$$\delta' > \delta^* > 0.$$

Применим к каждому шару

$$B(x', \delta') = i_{c,r}(B(x, \delta)),$$

где $B(x, \delta) \in \sigma(y)$, гомотетию с центром в точке $y' = i_{c,r}(y)$ и коэффициентом $\frac{\delta^*}{\delta}$. Тогда образом этого шара будет шар $B(x^*, \delta^*)$ радиуса δ^* , центр которого принадлежит лучу $[y'x']$. Заметим, что $B(x^*, \delta^*) \subset B(x', \delta')$ и $y' \in \partial B(x^*, \delta^*)$, то есть шар $B(x^*, \delta^*)$ является опорным к множеству F' в точке y' . Совокупность всех таких шаров обозначим через $\sigma^*(y')$. А совокупность всех шаров, входящих в системы $\sigma^*(y')$ при всех $y' \in F'$, обозначим σ^* . Очевидно, что радиусы всех шаров системы σ^* равны одному и тому же числу δ^* . Докажем, что системы σ^* , $y \in F$, удовлетворяют условиям 1 - 3 определения 2.

Поскольку каждый опорный шар из систем σ^* является опорным к множеству F' , то никакая внутренняя точка любого шара из σ^* не принадлежит множеству F' , и условие 1 определения 2 для систем шаров σ^* , при всех $y \in F$, выполнено.

Теперь докажем выполнение условия 2.

Покажем, что пересечение всех шаров системы $\sigma^*(y')$ имеет хотя бы одну внутреннюю точку.

Поскольку $F \in O_\delta$, то пересечение $\bigcap \sigma(y)$, где $y = i_{c,r}(y')$, содержит некоторый шар U , образом которого при инверсии $i_{c,r}$ является шар $U' \in \sigma'(y')$.

Далее покажем, что при надлежаще выбранной гомотетии h с центром в точке y' образ шара U' содержится в пересечении $\bigcap \sigma^*(y')$.

Коэффициент гомотетии h (обозначим его через k) выберем таким образом, чтобы каждый из шаров $B(x', \delta')$ системы $\sigma'(y')$ отображился внутрь соответствующего шара $B(x^*, \delta^*)$ из системы $\sigma^*(y')$, то есть должно выполняться неравенство $k\delta' < \delta^*$. Поэтому коэффициент k должен удовлетворять неравенству $0 < k < \min \left\{ \frac{\delta^*}{\delta'} \right\}$, где минимум берется по всем шарам системы $\sigma'(y')$.

Поскольку число δ^* для всех шаров системы $\sigma^*(y')$ одно и то же, то коэффициент k будет существовать в том случае, когда $\sup(\delta') < +\infty$, где верхняя грань берется по всем шарам системы $\sigma'(y')$. Таким образом, остается показать, что радиусы шаров системы $\sigma'(y')$ ограничены в совокупности.

Положим $\mu = \inf_{x \in Z_y} \{cx\}$, где Z_y - множество центров всех шаров из системы $\sigma(y)$.

Так как $c \notin cl(\bigcup \sigma)$, то $\mu > \delta$ и, учитывая формулу (4') из утверждения 4, получим $\delta' = \frac{r^2 \delta}{|cx|^2 - \delta^2} \leq \frac{r^2 \delta}{\mu^2 - \delta^2}$. Таким образом, при $k = \frac{\delta^*(\mu^2 - \delta^2)}{r^2 \delta}$ будем иметь: $h(U') \in \sigma^*(y')$. Поскольку $h(U')$ есть шар, являющийся образом шара при гомотетии, то пересечение всех шаров системы $\sigma^*(y')$ содержит внутренние точки. Ввиду произвольности системы $\sigma^*(y')$ условие 2 для каждой системы шаров из σ^* выполнено.

Докажем выполнение условия 3.

Пусть точки $y', y'_j \in F'$, и шар $B_j^* = B(x_j^*, \delta^*) \subset \sigma^*(y'_j)$, $j = 1, 2, \dots$; пусть при $j \rightarrow \infty$ $y'_j \rightarrow y'$ и $B_j^* \rightarrow B^*$.

Докажем, что $B^* \in \sigma^*(y')$.

Поскольку $B_j^* \rightarrow B^*$ при $j \rightarrow \infty$, то $x_j^* \rightarrow x^*$ при $j \rightarrow \infty$. Заметим, что радиусы шаров B_j^* , $j = 1, 2, \dots$, равны δ^* . Тогда и радиус шара B^* также равен δ^* . Так как $y'_j \in B_j^*$, $j = 1, 2, \dots$, то $y' \subset B^*$. Поскольку шары B_j^* , $j = 1, 2, \dots$, не имеют внутренних точек с множеством F' , то и шар B^* также не имеет внутренних точек с F' . Поэтому $y' \in \partial B^*$.

Рассмотрим лучи $\tilde{k} = [y'x^*)$ и $\tilde{k}_j = [y'_j x_j^*)$, $j = 1, 2, \dots$. Так как $y'_j \rightarrow y'$ и $x_j^* \rightarrow x^*$ при $j \rightarrow \infty$, то $\tilde{k}_j \rightarrow \tilde{k}$ при $j \rightarrow \infty$.

Пусть $y = i_{c,r}(y')$, $y_j = i_{c,r}(y'_j)$, $j = 1, 2, \dots$, и $k_j = \tilde{i}_{c,r}(\tilde{k})$, $k_j = \tilde{i}_{c,r}(\tilde{k}_j)$, $j = 1, 2, \dots$.

Тогда, в силу инволютивности инверсии и отображения

$\tilde{i}_{c,r} : y' = i_{c,r}(y)$, $y'_j = i_{c,r}(y_j)$, $j = 1, 2, \dots$, и $\tilde{k} = \tilde{i}_{c,r}(k)$, $\tilde{k}_j = \tilde{i}_{c,r}(k_j)$, $j = 1, 2, \dots$. Заметим, что точки y и y_j , $j = 1, 2, \dots$, принадлежат границе множества F и являются соответственно начальными лучей k и k_j , $j = 1, 2, \dots$.

Согласно построению систем $\sigma^*(y)$, для шара $B_j^* \in \sigma^*(y_j)$, найдется опорный шар $B(x'_j, \delta')$ из $\sigma'(y_j)$, центр которого принадлежит лучу \tilde{k}_j . Заметим, что образом шара $B(x'_j, \delta')$ при инверсии $i_{c,r}$ является шар $B_j \in \sigma(y_j)$, центр которого (обозначим его через x_j) принадлежит лучу k_j (теорема 3), а радиус равен δ . Поскольку $\tilde{k}_j \rightarrow \tilde{k}$ при $j \rightarrow \infty$ и отображение $\tilde{i}_{c,r}$ непрерывно, то лучи k_j , $j = 1, 2, \dots$, сходятся к лучу k при $j \rightarrow \infty$. Следовательно, при $j \rightarrow \infty$ шары B_j , $j = 1, 2, \dots$, сходятся к шару B с центром в точке $x \in k$, при этом его радиус равен δ (то есть $|yx| = \delta$). По условию теоремы множество F является O_δ -множеством, поэтому в силу третьего условия определения 2 шар $B \in \sigma(y)$.

Так как $\tilde{k} = \tilde{i}_{c,r}(k)$, $x^* \in \tilde{k}$, ($\tilde{k} = [y'x^*)$) и $|y'x^*| = \delta$ (радиус шара B), то $B^* \in \sigma^*(y')$. Тем самым, выполнение условия 3 определения 2 доказано.

Таким образом, доказали, что системы шаров $\sigma^*(y')$, $y' \in F'$, удовлетворяют всем условиям определения O_δ -множества, значит, множество F' принадлежит классу O_Δ .

Тем самым теорема доказана.

Библиографический список

1. Поликанова И.В. Об одном свойстве кратчайших на δ - прикасаемых гиперповерхностях // Геометрия многомерных пространств: Межвузовский сборник. Барнаул: Изд во АГУ. 1991. С. 45 - 53.
2. Решетняк Ю.Г. Об одном обобщении выпуклых поверхностей // Математический сборник. 1956. Т. 40. № 3. С. 381 - 398.
3. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 647 с.

ОБ АРМЕНДЕРИЗОВСКИХ
И КОСЫХ АРМЕНДЕРИЗОВСКИХ КОЛЬЦАХ

На протяжении данной работы слово "кольцо" означает ассоциативное кольцо с единицей.

Определение. Кольцо R называется армендеризовским, если для любых многочленов $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ и $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n \in R[x]$ из того, что $f(x)g(x) = 0$, следует $a_ib_j = 0$ для всех $0 \leq i \leq m$ и $0 \leq j \leq n$.

Определение. Кольцо называется редуцированным, если в нем нет ненулевых нильпотентных элементов.

В 1974 г. Е. Армендериз опубликовал статью [1], в которой отмечалось, что если произведение двух многочленов с коэффициентами из редуцированного кольца равно нулю, то и всевозможные попарные произведения коэффициентов этих многочленов равны нулю.

Позже в работе [2] кольцам, удовлетворяющим такому условию, дали название "армендеризовских". В этой работе также было показано, что полное матричное кольцо порядка $n \geq 2$ над любым кольцом не является армендеризовским.

В 1998 г. Д. Андерсон и В. Камилло доказали в [3], что кольцо многочленов над армендеризовским кольцом является армендеризовским.

В работах [4] и [5] отмечено, что любой идемпотент армендеризовского кольца является центральным и для любого кольца R кольцо

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$$

является армендеризовским тогда и только тогда, когда R – редуцированное кольцо.

В работе [6] было введено понятие косого армендеризовского кольца.

Определение. Пусть α – эндоморфизм кольца R . Кольцом косых многочленов $R[x; \alpha]$ называется множество многочленов над кольцом R с новой операцией умножения: $xr = \alpha(r)x$ для всех $r \in R$.

Определение. Пусть α – эндоморфизм кольца R . Кольцо R называется косым армендеризовским с эндоморфизмом α (или α -косым

армендеризовским), если для любых многочленов $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ и $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n \in R[x; \alpha]$, удовлетворяющих условию $f(x)g(x) = 0$, $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ для всех $0 \leq i \leq m$ и $0 \leq j \leq n$.

Определение. Пусть α – эндоморфизм кольца R . Кольцо R называется α -жестким, если для всех $a \in R$ из того, что $a\alpha(a) = 0$, следует $a = 0$.

В работе [6] ряд результатов, полученных ранее для армендеризовских колец, были обобщены на α -косые армендеризовские кольца. Кроме того, доказаны следующие факты:

1. Кольцо $R[x; \alpha]$ редуцированное в том и только в том случае, если кольцо R является α -жестким [6, предложение 3].
2. Любое α -жесткое кольцо является α -косым армендеризовским [6, следствие 4].

Рассмотрим множество

$$R^\sharp = R \times \mathbb{Z} = \{(a, n) \mid a \in R, n \in \mathbb{Z}\},$$

где R – произвольное кольцо и \mathbb{Z} – кольцо целых чисел. Определим на этом множестве следующие операции:

$$(a, n) + (b, m) = (a + b, n + m),$$

$$(a, n) \cdot (b, m) = (ab + am + bn, nm).$$

Относительно этих операций множество R^\sharp является ассоциативным кольцом, содержащим единицу $e = (0, 1)$.

В настоящей работе сделана попытка изучить армендеризовские и косые армендеризовские групповые кольца. Получены некоторые результаты для групповых колец над полем и групповых колец абелевых групп без кручения. Также исследованы косые армендеризовские кольца с присоединенной единицей R^\sharp . Кроме того, удалось ответить на вопрос, сформулированный в [6, с.115] для жестких колец, и обобщить результат [6, предложение 8].

1. О некоторых свойствах косых армендеризовских и жестких колец

Известно, что если кольцо R является α -жестким для некоторого эндоморфизма α кольца R , то выполняются следующие условия:

- 1) эндоморфизм α инъективен [6, с.104];
- 2) кольцо R редуцированное [6, с.104];
- 3) кольцо R является α -косым армендеризовским [6, следствие 4].

В работе [6] поставлен следующий вопрос: если выполняются перечисленные выше условия, то является ли кольцо R α -жестким? Ответ на этот вопрос дает ¹

Предложение 1. Пусть α – мономорфизм редуцированного кольца R и кольцо R является α -косым армендеризовским. Тогда R является α -жестким.

Доказательство. Предположим, что R не является α -жестким, т.е. существует ненулевой элемент $a \in R$, такой, что $a\alpha(a) = 0$. Тогда

$$(\alpha(a)X - \alpha(a))(\alpha(a)X + a) = 0.$$

Кольцо R является α -косым армендеризовским. Следовательно, $\alpha(a)^2 = 0$. Но в R нет ненулевых нильпотентных элементов, поэтому $\alpha(a) = 0$. В силу того, что α является мономорфизмом, $a = 0$. Противоречие. Предложение доказано.

В работе [6] доказано, что для любого α -жесткого кольца R кольцо

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$$

является $\bar{\alpha}$ -косым армендеризовским, где эндоморфизм $\bar{\alpha} : S \rightarrow S$ определен следующим образом:

$$\bar{\alpha}((a_{ij})) = (\alpha(a_{ij})).$$

Обратное утверждение в случае, если α – тождественный эндоморфизм кольца R , имеет место [4, замечание 2.5]. Оказывается, обратное утверждение верно для любого эндоморфизма α кольца R , такого, что $\alpha(1) = 1$, где 1 – единица кольца R . Для того, чтобы это показать, докажем сначала следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $b \in R$ – ненулевой нильпотентный элемент с индексом нильпотентности $n \geq 2$ и $0 \neq a \in R$, причем выполняются следующие условия:

- 1) $ab = ba$,
- 2) $a\alpha(a) = 0$ и $\alpha(b) = b$,
- 3) существует натуральное число n_0 , такое, что $\frac{n}{2} \leq n_0 < n$ и $ab^{n_0} \neq 0$.

Тогда кольцо R не является α -косым армендеризовским.

Доказательство. Так как выполняются условия 1) и 2), то

$$(aX + b^{n_0})(aX - b^{n_0}) = 0,$$

но $ab^{n_0} \neq 0$, что противоречит определению косого армендеризовского кольца. Лемма доказана.

Предложение 2. Пусть кольцо

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$$

является $\bar{\alpha}$ -косым армендеризовским, где эндоморфизм $\bar{\alpha} : S \rightarrow S$ определен следующим образом:

$$\bar{\alpha}((a_{ij})) = (\alpha(a_{ij}))$$

для некоторого эндоморфизма α кольца R , причем $\alpha(1) = 1$, где 1 – единица кольца R . Тогда кольцо R является α -жестким.

Доказательство. Предположим, что R не является α -жестким, т.е. существует ненулевой элемент $a \in R$, такой, что $a\alpha(a) = 0$. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Пусть e_{12} – матричная единица. Заметим, что $Ae_{12} = e_{12}A \neq 0$, $e_{12}^2 = 0$, $\bar{\alpha}(e_{12}) = e_{12}$ и $A\bar{\alpha}(A) = 0$, т.е. выполняется условие леммы -1. Следовательно, кольцо S не является $\bar{\alpha}$ -косым армендеризовским. Противоречие. Предложение доказано.

Лемма 2. Кольцо R является α -жестким тогда и только тогда, когда для всех $a \in R$ из того, что $\alpha(a)a = 0$, следует $a = 0$.

Доказательство. Действительно, если кольцо R является α -жестким, то оно является также и редуцированным, следовательно, в нем выполняется "коммутативность по нулю"[9, с.42].

Обратно, пусть для всех $a \in R$ из того, что $\alpha(a)a = 0$, следует $a = 0$. Докажем сначала, что кольцо R в этом случае редуцированное. Действительно, пусть найдется $0 \neq a \in R$, такой, что $a^2 = 0$. Тогда $\alpha(\alpha(a)a)\alpha(a)a = 0$. Следовательно, $\alpha(a)a = 0$. Отсюда $a = 0$. Получили противоречие, значит, кольцо R редуцированное. Покажем, что оно является также α -жестким. Пусть $r \in R$, такой что $r\alpha(r) = 0$. Тогда в силу

¹Как стало недавно известно автору, этот результат независимо был получен в [7, 8].

"коммутативности по нулю" $\alpha(r)r = 0$, следовательно, $r = 0$.

Пусть I – идеал кольца R , α – эндоморфизм кольца R . Если $\alpha(I) \subseteq I$, тогда эндоморфизм $\bar{\alpha} : R/I \rightarrow R/I$ определим следующим образом: $\bar{\alpha}(a + I) = \alpha(a) + I$.

Следующее утверждение является обобщением результата [6, предложение 8]. В работе [6] этот результат доказан лишь для $k = 2$.

Предложение 3. Пусть α – мономорфизм кольца R , $\alpha(1) = 1$, где 1 – единица кольца R , k – натуральное число, $k \geq 2$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) фактор-кольцо $R[x]/(x^k)$ является $\bar{\alpha}$ -косым армендеризовским;
- 2) кольцо R α -жесткое.

Доказательство. Предположим, что кольцо R не является α -жестким, т.е. существует $0 \neq r \in R$, такой, что $\alpha(r)r = 0$. Тогда

$$(\alpha(r) - \bar{x}^{n-1}y)(r + \bar{x}^{n-1}y) = 0,$$

но $\alpha(r)\bar{x}^{n-1} \neq 0$. Получили противоречие, так как по условию фактор-кольцо $R[x]/(x^k)$ является $\bar{\alpha}$ -косым армендеризовским.

Обратно, пусть

$$f = \sum_{i=0}^n f_i y^i, g = \sum_{j=0}^m g_j y^j \in (R[x]/(x^k))[y; \bar{\alpha}],$$

причем $f_i = \sum_{l=0}^{k-1} f_{il} \bar{x}^l, g_j = \sum_{s=0}^{k-1} g_{js} \bar{x}^s \in R[x]/(x^k)$.

Тогда можно записать

$$f = \sum_{i=0}^{k-1} h_i \bar{x}^i, g = \sum_{j=0}^{k-1} p_j \bar{x}^j,$$

где

$$h_i = \sum_{l=0}^n f_{il} y^l, p_j = \sum_{s=0}^m g_{js} y^s \in R[y; \alpha].$$

Пусть $fg = 0$, тогда имеет место система равенств:

$$\begin{aligned} h_0 p_0 &= 0, \\ h_0 p_1 + h_1 p_0 &= 0, \\ h_0 p_2 + h_1 p_1 + h_2 p_0 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ h_0 p_{k-1} + h_1 p_{k-2} + \dots + h_{k-2} p_1 + h_{k-1} p_0 &= 0. \end{aligned}$$

Предположим, что $h_i p_j = 0$ для $i + j \leq s$ для некоторого фиксированного числа s , $0 \leq s \leq k-1$. Умножив слева на p_0 равенство

$$h_0 p_{s+1} + h_1 p_s + \dots + h_s p_1 + h_{s+1} p_0 = 0,$$

получим $p_0 h_{s+1} p_0 = 0$. Следовательно, $(h_{s+1} p_0)^2 = 0$. Кольцо R является α -жестким, следовательно, кольцо $R[x; \alpha]$ редуцированное [6, предложение 3]. Поэтому $h_{s+1} p_0 = 0$. Таким образом, мы имеем:

$$h_0 p_{s+1} + h_1 p_s + \dots + h_s p_1 = 0.$$

Умножив это равенство слева на p_1 , получим $h_s p_0 = 0$ и т.д. По индукции $h_i p_j = 0$ для $i + j \leq s + 1$.

Итак, мы показали, что $h_i p_j = 0$ для $i + j \leq k - 1$. Кольцо R по условию α -жесткое, следовательно, и α -косое армендеризовское [6, следствие 4]. Значит, $f_i \alpha^l(g_{sj}) = 0$ для всех i, j, l, s . Поэтому для всех i и j

$$\begin{aligned} f_i \bar{\alpha}^i(g_j) &= \left(\sum_{l=0}^{k-1} f_{il} \bar{x}^l \right) \bar{\alpha}^i \left(\sum_{s=0}^{k-1} g_{js} \bar{x}^s \right) = \\ &= \left(\sum_{l=0}^{k-1} f_{il} \bar{x}^l \right) \left(\sum_{s=0}^{k-1} \alpha^i(g_{js}) \bar{x}^s \right) = \\ &= \sum_{t=0}^{k-1} \left(\sum_{l+s=t} f_{il} \alpha^i(g_{js}) \right) \bar{x}^t = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, кольцо $R[x]/(x^k)$ является $\bar{\alpha}$ -косым армендеризовским. Предложение доказано.

Пусть α – эндоморфизм кольца R . Определим эндоморфизм $\bar{\alpha}$ кольца R^\sharp с присоединенной единицей следующим образом:

$$\bar{\alpha}((a, n)) = (\alpha(a), n).$$

Тогда имеет место

Предложение 4. Пусть α – эндоморфизм кольца R , причем $\alpha(1) = 1$, где 1 – единица кольца R . Кольцо R α -косое армендеризовское в том и только в том случае, если кольцо R^\sharp является $\bar{\alpha}$ -косым армендеризовским.

Доказательство. Предположим, что кольцо R является α -косым армендеризовским. Пусть $f = \sum_{i=0}^n (a_i, n_i) x^i, g = \sum_{j=0}^m (b_j, m_j) x^j \in R^\sharp[x; \bar{\alpha}]$, где $a_i, b_j \in R, n_i, m_j \in \mathbb{Z}$ для всех i и j , причем $fg = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 = fg &= \left(\sum_{i=0}^n (a_i, n_i) x^i \right) \left(\sum_{j=0}^m (b_j, m_j) x^j \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} (a_i, n_i) x^i (b_j, m_j) x^j \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} (a_i, n_i) \bar{\alpha}((b_j, m_j)) \right) x^k = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} (a_i, n_i)(\alpha(b_j), m_j) \right) x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i+j=k} (a_i \alpha^i(b_j) + a_i m_j + \alpha^i(b_j) n_i; n_i m_j) x^k.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=0}^n n_i x^i \sum_{j=0}^m m_j x^j = 0,$$

но в силу того, что $\mathbb{Z}[x]$ является областью целостности, $\sum_{i=0}^n n_i x^i = 0$ или $\sum_{j=0}^m m_j x^j = 0$.

Пусть $\sum_{i=0}^n n_i x^i = 0$. Тогда для всех $k = 0, 1, \dots, n + m$

$$\sum_{i+j=k} (a_i \alpha^i(b_j) + a_i m_j) = 0.$$

2. Армендеризовские групповые кольца

Определение. Пусть G – мультипликативная группа, R – произвольное кольцо. Групповым кольцом RG группы G над кольцом R называется множество, состоящее из всевозможных формальных сумм вида $\sum_{g \in G} \alpha_g g$, в которых лишь конечное число коэффициентов $\alpha_g \in R$ отлично от нуля, причем такие суммы считаются равными тогда и только тогда, когда у них совпадают коэффициенты $\alpha_g \in R$ для всех $g \in G$. Операции над формальными суммами определяются следующим образом:

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{g \in G} \beta_g g = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g,$$

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \left(\sum_{h \in G} \beta_h h \right) = \sum_{g, h \in G} \alpha_g \beta_h gh.$$

Определение. Кольцо R называется регулярным (по фон Нейману), если $(\forall a \in R) (\exists x \in R) (a = axa)$.

Предложение 5. Пусть R – регулярное кольцо, группа G локально конечна и порядок каждого элемента группы G обратим в R . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) RG – армендеризовское кольцо,
- 2) RG – редуцированное кольцо.

Доказательство. Так как кольцо R регулярное, группа G локально конечна и порядок каждого элемента группы G обратим в R , то по [10, теорема 39] групповое кольцо RG является регулярным. Согласно [3, теорема 6] для регулярного кольца следующие условия эквивалентны:

Значит, $\sum_{i=0}^n a_i x^i \sum_{j=0}^m (b_j + m_j \cdot 1) x^j = 0$ в $R[x; \alpha]$.

По условию кольцо R является α -косым армендеризовским, поэтому $a_i \alpha^i(b_j + m_j \cdot 1) = 0$ для всех i и j . Следовательно,

$$a_i \alpha^i(b_j + m_j \cdot 1) = a_i \alpha^i(b_j) + a_i \alpha^i(m_j \cdot 1) =$$

$$= a_i \alpha^i(b_j) + a_i m_j = 0.$$

Тогда $(a_i, n_i) \bar{\alpha}((b_j, m_j)) = 0$ для всех i и j , т.е. кольцо R^{\sharp} является $\bar{\alpha}$ -косым армендеризовским.

Аналогично рассматривается случай, когда $\sum_{j=0}^m m_j x^j = 0$.

Обратное утверждение очевидно.

1) кольцо является армендеризовским и 2) кольцо является редуцированным. Предложение доказано.

Предложение 6. Кольцо RG является армендеризовским в том и только в том случае, если кольцо $(R[X])G$ является армендеризовским.

Доказательство. Согласно [3, теорема 2] кольцо RG является армендеризовским тогда и только тогда, когда армендеризовским является кольцо $RG[X]$. Так как $RG[X] \cong (R[X])G$, то предложение доказано.

Пусть R – конечное редуцированное кольцо, тогда R – прямая сумма полей Галуа. Таким образом, вопрос для редуцированных конечных колец сводится к конечным полям.

Предложение 7. Пусть порядок n конечной группы G не делится на характеристику p поля F ($p > 0$). Групповое кольцо FG является армендеризовским тогда и только тогда, когда FG – конечная прямая сумма тел.

Доказательство. Пусть FG – армендеризовское кольцо. Так как порядок n группы G не делится на характеристику p поля F , то по теореме Машке [11, с.139] FG является конечной прямой суммой матриц над телами, конечномерными над F . В работе [4] показано, что полное матричное кольцо порядка $m \geq 2$ над любым матричным кольцом не является армендеризовским. Следовательно, кольцо FG представляет собой конечную прямую сумму тел.

Обратное утверждение следует из того, что любое редуцированное кольцо является армен-

деризовским [1, лемма 1] и прямая сумма армендеризовских колец является армендеризовским кольцом. Предложение доказано.

Для конечного поля F имеет место следующее следствие:

Следствие 1. Пусть порядок n группы G не делится на характеристику p конечного поля F ($p > 0$). Кольцо FG является армендеризовским тогда и только тогда, когда группа G абелева.

Доказательство. Пусть кольцо FG является армендеризовским. Тогда по предложению 7 FG представляет собой конечную прямую сумму тел. По теореме Веддерберна [11, с.161] конечное тело является полем. Кольцо FG конечно, поэтому оно представляет собой прямую сумму полей Галуа. Следовательно, кольцо FG коммутативно, а значит, группа G абелева.

Обратно, пусть группа G абелева. По теореме Машке [11, с.139] FG представляет собой конечную прямую сумму матриц над телами, конечномерными над F . Так как G абелева группа, то кольцо FG коммутативно. Значит, FG – прямая сумма тел, поэтому FG является армендеризовским кольцом. Следствие доказано.

Если F – поле характеристики p (p – простое число), то $\mathbb{Z}_p \subset F$, поэтому из предложения 7 и следствия 1 вытекает

Следствие 2. Пусть поле F имеет характеристику p ($p > 0$) и порядок конечной группы G не делится на p . Кольцо FG является армендеризовским тогда и только тогда, когда группа G абелева.

Доказательство. Пусть кольцо FG является армендеризовским. Тогда подкольцо $\mathbb{Z}_p G \subset FG$ тоже является армендеризовским. Из следствия 1 следует, что G – абелева группа.

Обратно, если группа G абелева, то кольцо FG коммутативно. С другой стороны, по теореме Машке групповое кольцо FG является прямой суммой полных матричных колец над телами. Следовательно, FG – прямая сумма полей, и значит, является армендеризовским кольцом. Следствие доказано.

Непосредственно из следствия 2 вытекает, что для любой конечной циклической группы C_n порядка n и любого поля F характеристики p ($p > 0$ и n не делится на p) групповое кольцо FC_n является армендеризовским.

Заметим, что среди неабелевых конечных

групп существуют такие группы G , что для любого поля F характеристики p (p – простое) групповое кольцо FG не является армендеризовским. Рассмотрим два примера таких групп.

Пример 1. Рассмотрим группу диэдра $G = \{a, b | a^4 = b^2 = e, ba = a^3b\}$. Это неабелева группа восьмого порядка. Если поле F имеет характеристику $p > 2$, то по следствию 1 FG не является армендеризовским кольцом.

Пусть поле F имеет характеристику $p = 2$. Кольцо FG не является армендеризовским, так как

$$((1 - a^2) + (b - a^2)X)((1 - a^2) + (b - a^2)X) = 0,$$

но $(1 - a^2)(b - a^2) \neq 0$. Следовательно, кольцо FG не является армендеризовским.

Пример 2. Рассмотрим группу кватернионов $G = \{a, b | a^4 = e, a^2 = b^2, ba = a^3b\}$. Это также неабелева группа восьмого порядка. Аналогично тому, как в предыдущем примере, достаточно показать, что FG не является армендеризовским при $p = 2$. Пусть

$$f(X) = (1 + a) + (1 + ab)X + (1 + b)X^2$$

и

$$g(X) = (1 + a)(1 + a^2) + (1 + b)(1 + b^2)X \in FG[X].$$

Тогда $f(X)g(X) = 0$, но $(1 + a)(1 + b)(1 + b^2) \neq 0$.

Предложение 8. Пусть R – кольцо характеристики p . Если групповое кольцо RG является армендеризовским, то либо R – редуцированное кольцо, либо в группе G нет элемента порядка p .

Доказательство. Предположим, что RG – армендеризовское кольцо. Пусть элемент $a \in R$, такой, что $a^2 = 0$, и элемент $h \in G$ имеет порядок p . Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &= a^p - (h - e)^p x^p = \\ &= (a - (h - e)x)(a^{p-1} + a^{p-2}(h - e)x + \dots + \\ &\quad + (h - e)^{p-1}x^{p-1}). \end{aligned}$$

Однако $a(h - e)^{p-1} \neq 0$. Получили противоречие с тем, что RG – армендеризовское кольцо.

3. Косые армендеризовские групповые кольца

Пусть α – эндоморфизм кольца R . Продолжим α до эндоморфизма на групповое кольцо

RG следующим образом:

$$\alpha\left(\sum_{g \in G} \beta_g g\right) = \sum_{g \in G} \alpha(\beta_g)g, \beta_g \in R.$$

Для доказательства следующего предложения используется метод, аналогичный методу доказательства [3, теорема 2] и [6, теорема 6].

Предложение 9. Пусть α – эндоморфизм кольца R и $\alpha^t = I_R$ для некоторого натурального t , где I_R – тождественный эндоморфизм кольца R . Пусть G – бесконечная циклическая группа. Кольцо R является α -косым армендеризовским в том и только в том случае, если групповое кольцо RG α -косое армендеризовское.

Доказательство. Пусть кольцо R является α -косым армендеризовским и $p(x) = p_0 + p_1x + \dots + p_mx^m$, $q(x) = q_0 + q_1x + \dots + q_nx^n \in RG[y; \alpha]$, такие, что $pq = 0$. Пусть также $p_i = \sum_{k=-v_i}^{w_i} a_{ik}g^k$, $q_j = \sum_{l=-u_j}^{z_j} b_{jl}g^l$, где $v_i, w_i, u_j, z_j \geq 0$ для всех i и j . Положим

$$k = \max_{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n} \{v_i + w_i, u_j + z_j\}.$$

Тогда $p(g^{tk})q(g^{tk}) = 0$ и $p(g^{tk}), q(g^{tk}) \in RG$. Заметим, что множество коэффициентов всех p_i (всех q_j) совпадает со множеством коэффициентов $p(g^{tk})$ (соответственно $q(g^{tk})$). Действительно, если

$$a_{ij}g^{j+itk} = a_{i_1j_1}g^{j_1+i_1tk},$$

то $a_{ij} = a_{i_1j_1}$ и $j + itk = j_1 + i_1tk$. Из равенства $j + itk = j_1 + i_1tk$ и неравенства $|j - j_1| < k$ следует, что $j = j_1$ и $i = i_1$. Кроме того, по условию кольцо R α -косое армендеризовское, поэтому из того, что $p(g^{tk})q(g^{tk}) = 0$ и $\alpha^t = I_R$ следует

$$0 = a_{ik}\alpha^{k+itl}(b_{js}) = a_{ik}\alpha^k(b_{js}).$$

Значит, $p_i\alpha^i(q_j) = 0$ для всех i и j , потому что $p_i\alpha^i(q_j) = \sum_{k+s=l} a_{ik}\alpha^k(b_{js})$, где $l = -v_i - u_j, \dots, w_i + z_j$.

Обратное утверждение следует из того, что подкольцо α -косого армендеризовского кольца является α -косым армендеризовским. Предложение доказано.

Следствие 3. Пусть α – эндоморфизм кольца R и $\alpha^t = I_R$ для некоторого положительного целого t , где I_R – тождественный эндоморфизм кольца R . Пусть G – конечно порожденная абелева группа без кручения. Кольцо R является α -косым армендеризовским тогда и только тогда, когда групповое кольцо RG α -косое армендеризовское.

Доказательство. Пусть кольцо R является α -косым армендеризовским. Пусть a_1 и a_2 – порождающие элементы группы G . Обозначим $G_1 = \langle a_1 \rangle$ и $G_2 = \langle a_2 \rangle$. Нетрудно показать, что кольцо RG изоморфно кольцу $(RG_1)G_2$. Дважды применяя предложение 9,

мы получаем, что кольцо RG α -косое армендеризовское. По индукции кольцо RG является армендеризовским для любого конечного числа порождающих элементов группы G . Обратное утверждение очевидно. Следствие доказано.

Следствие 4. Пусть α – эндоморфизм кольца R и $\alpha^t = I_R$ для некоторого положительного целого t , где I_R – тождественный эндоморфизм кольца R . Пусть G – абелева группа без кручения. Кольцо R является α -косым армендеризовским в том и только в том случае, если групповое кольцо RG α -косое армендеризовское.

Доказательство. Докажем для случая, когда группа G является бесконечно порожденной. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – порождающие элементы группы G . Пусть многочлены $p(X), q(X) \in RG[X]$, такие, что $p(X)q(X) = 0$. Тогда $p(X), q(X) \in RH[X]$, где H – некоторая конечно порожденная подгруппа группы G . Так как R – α -косое армендеризовское кольцо, то групповое кольцо RH также является α -косым армендеризовским (по следствию 3, поэтому все попарные произведения коэффициентов многочленов $p(X)$ и $q(X)$ равны нулю. Следовательно, в силу произвольности многочленов $p(X)$ и $q(X)$ кольцо RG является α -косым армендеризовским. Обратное утверждение очевидно. Следствие доказано.

Вопрос о полном описании армендеризовских групповых колец конечных циклических групп остается открытым. Оказывается, что групповое кольцо $R(C_n \times C_m)$ прямой суммы конечных циклических групп в случае, если порядки этих групп делятся на характеристику кольца R и $\alpha(1) = 1$, где 1 – единица кольца R , не является α -косым армендеризовским. Для доказательства этого факта покажем сначала справедливость леммы 3, являющейся аналогом леммы 2.

Лемма 3. Пусть $a, b \in R$ – ненулевые нильпотентные элементы с индексами нильпотентности m и n соответственно ($n, m \geq 2$), причем выполняются следующие условия:

- 1) $ab = ba$,
- 2) $\alpha(a) = a$ и $\alpha(b) = b$,
- 3) существуют натуральные числа m_0 и n_0 , такие, что $\frac{m}{2} \leq m_0 < m$, $\exists \frac{n}{2} \leq n_0 < n$ и $a^{m_0}b^{n_0} \neq 0$.

Тогда кольцо R не является α -косым армендеризовским.

Доказательство. Так как выполняются условия 1) и 2), то

$$(\alpha(a^{m_0})X + b^{n_0})(a^{m_0}X - b^{n_0}) = 0.$$

Так как $a^{m_0}b^{n_0} \neq 0$, то R не является α -косым армендеризовским. Лемма доказана.

Предложение 10. Групповое кольцо $R(C_p \times C_p)$, где C_p – циклическая группа порядка p и R – кольцо характеристики p , не является α -косым армендеризовским для любого эндоморфизма α , такого, что $\alpha(1) = 1$, где 1 – единица кольца R .

Доказательство. Пусть $g \in G$ – элемент порядка p . Нетрудно убедиться, что элементы $a = (a, e) - (e, e)$ и $b = (e, a) - (e, e)$, где e – единичный элемент группы C_p , являются нильпотентами индекса p и удовлетворяют условию леммы 3 (в частности, $a^{p-1}b^{p-1} \neq 0$). Следовательно, кольцо $R(C_p \times C_p)$ не является α -косым армендеризовским. Предложение доказано.

Непосредственно из предложения 10 следует, что групповое кольцо $R(G_1 \times G_2)$ не является α -косым армендеризовским, где G_1 и G_2 – конечные группы, порядки которых делятся на некоторое простое число p , R – кольцо характеристики p и $\alpha(1) = 1$, где 1 – единица кольца R .

Для конечных циклических групп в общем случае вопрос остается открытым. Пока рассмотрены лишь отдельные примеры. Так, в примере 3 рассмотрено групповое кольцо циклической C_3 группы третьего порядка над коммутативным кольцом без делителей нуля.

Пример 3. Пусть R – коммутативное кольцо без делителей нуля характеристики 3 и $C_3 = \langle g | g^3 = e \rangle$. Пусть $p = p_0 + p_1g + p_2g^2$, $q = q_0 + q_1g + q_2g^2 \in RG[X]$, где $p_i, q_j \in R[X]$. Нетрудно показать, что равенство $pq = 0$ эквивалентно следующему условию:

$$\begin{cases} p_0 + p_1 + p_2 & = & 0 \\ q_0 & = & q_1 = q_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} q_0 + q_1 + q_2 & = & 0 \\ p_0 & = & p_1 = p_2. \end{cases}$$

Отсюда легко следует, что групповое кольцо RC_3 в этом случае является армендеризовским.

Кроме того, если R – коммутативное кольцо без делителей нуля характеристики p , где $p = 0$ или $p \neq 3$, то групповое кольцо RC_3 редуцированное, а следовательно, и армендеризовское.

Таким образом, для любого коммутативного кольца без делителей нуля групповое кольцо RC_3 является армендеризовским.

Пусть

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in R \right\}.$$

Так как $RC_3 \cong T$, то T является армендеризовским, если R – коммутативное кольцо без делителей нуля. Таким образом, мы привели еще один пример армендеризовского подкольца полного матричного кольца третьего порядка (над коммутативным кольцом без делителей нуля).

Пусть α_1, α_2 – эндоморфизмы произвольных колец R_1 и R_2 соответственно, G – мультипликативная группа. Определим эндоморфизм $\bar{\alpha}$ прямой суммы $R_1 \times R_2$ следующим образом: $\bar{\alpha}((x, y)) = (\alpha_1(x), \alpha_2(y))$, где $x \in R_1$ и $y \in R_2$. Ясно, что групповое кольцо $(R_1 \times R_2)G$ является $\bar{\alpha}$ -косым армендеризовским в том и только в том случае, когда косым армендеризовскими с эндоморфизмами α_1 и α_2 соответственно являются кольца R_1G и R_2G (это следует из замечания: $(R_1 \times R_2)G \cong (R_1G) \times (R_2G)$).

Библиографический список

1. Armendariz E.P. A note on extensions of Baer and p.p.-rings // J. Austral. Math. Soc. 1974. 18. pp.470–473.
2. Rege M.B., Chhawchharia S. Armendariz rings // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 1997. 73. pp. 14–17.
3. Anderson D.D., Camillo V. Armendariz rings and Gaussian rings // Communications in algebra. 1998. 26(7). p. 2265–2272.
4. Kim N.K., Lee Y. Armendariz rings and Reduced rings // Journal of Algebra. 2000. 223. pp. 477–488.
5. Lee T.-K., Wong T.-L. On Armendariz rings // Houston Journal of Mathematics. 2003. Vol. 29. № 3. pp. 583–593.
6. Hong C.Y., Kim N.K., Kwak T.K. On Skew Armendariz rings // Communications in algebra. 2003. Vol. 31. № 1. pp. 103–122.
7. Matczuk J. A Characterization of σ -Rigid Rings // Communications in algebra. 2004. Vol. 32. № 11. pp. 4333–4336.
8. Chen W., Tong W. A Note on Skew Armendariz Rings // Communications in algebra. 2005. Vol. 33. pp. 1137–1140.
9. Мальцев Ю.Н., Петров Е.П. Лекции по теории колец и модулей: Учебное пособие. Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2000. 128 с.
10. Бовди А.А. Групповые кольца: Учебное пособие. – Ужгород, 1974. 118 с.
11. Лагутина Л.А., Мальцев Ю.Н., Петров Е.П. Избранные лекции по алгебре: Учебное пособие. Барнаул: Изд-во АлтГУ, 1997. 166 с.

ФОРМУЛЫ ГЕРОНА НЕКОТОРЫХ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ГЕОМЕТРИЙ

Под формулой Герона в евклидовой геометрии понимается площадь треугольника, выраженная через длины его сторон. В данной работе решением функциональных уравнений находятся формулы Герона плоскости Евклида и Минковского, а также собственно гельмгольцевой, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей.

1. Введение. В работе [1] Г.Г. Михайличенко приводит классификацию на R^2 феноменологически симметричных метрических функций f . Это функции со следующими свойствами:

- 1). Область определения M функции f плотное подмножество в $R^2 \times R^2$.
- 2). Функция f – достаточно гладкая в M .
- 3). Метрическая функция f невырождена, то есть не существует замены координат, приводящей к уменьшению числа переменных в f .
- 4). Аксиома феноменологической симметрии: для любой четверки произвольных точек $\langle xyzw \rangle$ открытого и плотного подмножества в $(R^2)^4$, каждая пара из которой принадлежит множеству M , существует гладкая функция шести переменных $\Phi : R^6 \rightarrow R$ такая, что имеет место функциональное уравнение

$$\Phi(f(x, y), f(x, z), f(x, w), f(y, z), f(y, w), f(z, w)) = 0. \quad (1)$$

Плоскость R^2 с феноменологически симметричной метрической функцией будем называть двумерной феноменологически симметричной геометрией. К числу таких геометрий принадлежат:

геометрия плоскости Евклида E^2 ($\varepsilon = -1$) и псевдоевклидовой плоскости Минковского PE^2 ($\varepsilon = 1$):

$$f(xy) = (x^1 - y^1)^2 - \varepsilon(x^2 - y^2)^2, \quad (2)$$

где x^1 и x^2 – координаты точки x ;

геометрия собственно гельмгольцевой плоскости Γ^2 ($\delta = -1$, $\Phi(x) = \arctg(x)$, $\alpha = \gamma = const > 0$); псевдогельмгольцевой плоскости $P\Gamma^2$ ($\delta = 1$, $\Phi(x) = \ar(c)th(x)$, $\alpha = \beta = const > 0$ и $\beta \neq 1$) и дуальногельмгольцевой плоскости D^2 ($\delta = 0$, $\Phi(x) = x$, $\alpha = 1$):

$$f(xy) = [(x^1 - y^1)^2 - \delta(x^2 -$$

$$-y^2)^2] \exp \left(2\alpha\Phi_\delta \frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1} \right). \quad (3)$$

Все выше приведенные плоскости допускают трехпараметрические группы движений, по которым они восстанавливаются как двухточечные инварианты. Компоненты единицы этих групп можно задать уравнениями:

$$\begin{aligned} x'^1 &= ax^1 + \varepsilon bx^2 + c, & x'^2 &= bx^1 + ax^2 + d, \\ a^2 - \varepsilon b^2 &= 1, \end{aligned} \quad (2')$$

$$\begin{aligned} x'^1 &= ax^1 + \delta bx^2 + c, & x'^2 &= bx^1 + ax^2 + d, \\ (a^2 - \delta b^2) \exp \left(2\alpha\Phi_\delta \frac{b}{a} \right) &= 1. \end{aligned} \quad (3')$$

2. Инварианты групп движений.

Рассмотрим гладкую функцию трех точек $t : (R^2)^3 \mapsto R$ с открытой и плотной областью определения в $(R^2)^3$, причем для произвольной тройки $\langle xyz \rangle$ пары $\langle xy \rangle, \langle xz \rangle, \langle yz \rangle \in M$. Эта функция является инвариантом группы движений, если она сохраняется при преобразованиях из этой группы, т. е.

$$t(x'y'z') = t(xyz).$$

Справедлива следующая лемма

Лемма 1. Трехточечными инвариантами группы (2') являются функции:

$$\begin{aligned} S(xyz) &= (x^1 - y^1)(x^2 - z^2) - \\ &- (x^1 - z^1)(x^2 - y^2), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} P(xyz) &= (x^1 - y^1)(x^1 - z^1) - \\ &- \varepsilon(x^2 - y^2)(x^2 - z^2), \end{aligned} \quad (4.2)$$

а группы (3') – функции:

$$\begin{aligned} S(xyz) &= [(x^1 - y^1)(x^2 - z^2) - \\ &- (x^1 - z^1)(x^2 - y^2)] \exp \left(\alpha\Phi_\delta \frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1} + \right. \\ &\left. + \alpha\Phi_\delta \frac{x^2 - z^2}{x^1 - z^1} \right), \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$P(xyz) = [(x^1 - y^1)(x^1 - z^1) - \delta(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)] \exp \left(\alpha \Phi_\delta \frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1} + \alpha \Phi_\delta \frac{x^2 - z^2}{x^1 - z^1} \right), \quad (5.2)$$

причем области определения последних открыты и плотны в $(R^2)^3$.

Доказательство сводится к очевидной проверке условия инвариантности. ■

Заметим, что для плоскости Евклида инвариант (4.1) интерпретируется как площадь треугольника, построенного на точках x, y, z . Аналогичную интерпретацию примем и в отношении остальных геометрий.

Можно показать, что любой инвариант групп движений (2') и (3') является функцией инвариантов $f(xy), S(xyz), P(xyz)$. С другой стороны, независимыми инвариантами этих групп являются также функции $f(xy), f(xz), f(yz)$. Поэтому в областях определения функций S и P имеют место функциональные связи

$$S(xyz) = S(f(xy), f(xz), f(yz)), \quad (6)$$

$$P(xyz) = P(f(xy), f(xz), f(yz)). \quad (7)$$

Итак, приходим к функциональным уравнениям, решая которые мы должны найти явные представления функций $S(xyz)$ и $P(xyz)$ через метрические функции $f(xy), f(xz), f(yz)$, т. е. должны получить формулы Герона.

3. Формулы Герона геометрий Евклида и Минковского. Найдем решение функциональных уравнений (6) и (7) для геометрии с метрической функцией (2). Эти уравнения в явном виде записываются так:

$$S(f(xy), f(xz), f(yz)) = (x^1 - y^1)(x^2 - z^2) - (x^1 - z^1)(x^2 - y^2), \quad (8)$$

$$P(f(xy), f(xz), f(yz)) = (x^1 - y^1)(x^1 - z^1) -$$

$$-\varepsilon(x^2 - y^2)(x^2 - z^2). \quad (9)$$

Справедлива основная теорема этого параграфа.

Теорема 1. Квадрат трехточечного инварианта S , выраженный через $f(xy), f(xz)$ и $f(yz)$, представим в виде:

$$S^2 = \varepsilon \frac{1}{4} [f^2(xy) + f^2(xz) + f^2(yz) - 2f(xy)f(xz) - 2f(xy)f(yz) - 2f(xz)f(yz)], \quad (10)$$

а инвариант P - в виде:

$$P = \frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - \frac{1}{2}f(yz), \quad (11)$$

где для плоскости Евклида $\varepsilon = -1$, а для плоскости Минковского $\varepsilon = 1$.

Формулы (10) и (11) будем называть формулами Герона. (10) записывается еще в таком виде:

$$S^2 = \varepsilon \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(xy) & f(xz) \\ 1 & f(xy) & 0 & f(yz) \\ 1 & f(xz) & f(yz) & 0 \end{vmatrix}. \quad (10')$$

Классическую формулу Герона плоскости Евклида записывают обычно в виде:

$$S^2 = 4p(p-a)(p-b)(p-c),$$

где $a = \sqrt{f(xy)}$, $b = \sqrt{f(xz)}$, $c = \sqrt{f(yz)}$, а $p = (a + b + c)/2$ - полупериметр.

Доказательство теоремы 1. Получим сначала формулу (10). Продифференцируем уравнение (8) по переменным y^1 и y^2 . Воспользовавшись выражением (2) для метрической функции $f(xy)$, получим систему равенств (12.1). Дифференцируя теперь уравнение (8) по z^1 и z^2 , приходим к (12.2). Дифференцируя, наконец, (8) по x^1 и x^2 , получаем (12.3).

$$\left. \begin{aligned} -(x^2 - z^2) &= -2(x^1 - y^1) \frac{\partial S}{\partial f(xy)} + 2(y^1 - z^1) \frac{\partial S}{\partial f(yz)}, \\ -\varepsilon(x^1 - z^1) &= -2(x^2 - y^2) \frac{\partial S}{\partial f(xy)} + 2(y^2 - z^2) \frac{\partial S}{\partial f(yz)}. \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

$$\left. \begin{aligned} (x^2 - y^2) &= -2(x^1 - z^1) \frac{\partial S}{\partial f(xz)} - 2(y^1 - z^1) \frac{\partial S}{\partial f(yz)}, \\ \varepsilon(x^1 - y^1) &= -2(x^2 - z^2) \frac{\partial S}{\partial f(xz)} - 2(y^2 - z^2) \frac{\partial S}{\partial f(yz)}. \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

$$\left. \begin{aligned} (y^2 - z^2) &= 2(x^1 - y^1) \frac{\partial S}{\partial f(xy)} + 2(x^1 - z^1) \frac{\partial S}{\partial f(xz)}, \\ \varepsilon(y^1 - z^1) &= 2(x^2 - y^2) \frac{\partial S}{\partial f(xy)} + 2(x^2 - z^2) \frac{\partial S}{\partial f(xz)}. \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

Теперь сведем равенства (12.1) – (12.3) к системе дифференциальных уравнений. Для этого сделаем следующие преобразования. Умножим первое из равенств (12.1) на разность $-(x^2 - z^2)$, а второе на $(x^1 - z^1)$, затем их сложим, предварительно учтя соотношение

$$(x^1 - z^1)(y^2 - z^2) - (y^1 - z^1)(x^2 - z^2) = S : \\ -\varepsilon f(xz) = 2S \frac{\partial S}{\partial f(xy)} + 2S \frac{\partial S}{\partial f(yz)}.$$

Если первое выражение системы (12.2) умножить на разность $(x^2 - y^2)$, а второе на $-(x^1 - y^1)$, то складывая их, учитывая равенство $(x^1 - y^1)(y^2 - z^2) - (y^1 - z^1)(x^2 - y^2) = S$, приходим ко второму дифференциальному уравнению

$$-\varepsilon f(xy) = 2S \frac{\partial S}{\partial f(xz)} + 2S \frac{\partial S}{\partial f(yz)}.$$

Умножая, наконец, первое выражение в (12.3) на разность $(y^2 - z^2)$, а второе на $-(y^1 - z^1)$, после сложения приходим к третьему уравнению

$$-\varepsilon f(yz) = 2S \frac{\partial S}{\partial f(xy)} + 2S \frac{\partial S}{\partial f(xz)}.$$

$$\left. \begin{aligned} -(x^1 - z^1) &= -2(x^1 - y^1) \frac{\partial P}{\partial f(xy)} + 2(y^1 - z^1) \frac{\partial P}{\partial f(yz)}, \\ -(x^2 - z^2) &= -2(x^2 - y^2) \frac{\partial P}{\partial f(xy)} + 2(y^2 - z^2) \frac{\partial P}{\partial f(yz)}. \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

$$\left. \begin{aligned} -(x^1 - y^1) &= -2(x^1 - z^1) \frac{\partial P}{\partial f(xz)} - 2(y^1 - z^1) \frac{\partial P}{\partial f(yz)}, \\ -(x^2 - y^2) &= -2(x^2 - z^2) \frac{\partial P}{\partial f(xz)} - 2(y^2 - z^2) \frac{\partial P}{\partial f(yz)}. \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

Для сведения систем выражений (13.1) и (13.2) к системе дифференциальных уравнений проделаем следующие преобразования. Умножим первое выражение из системы (13.1) на разность $x^1 - z^1$, а второе на $-\varepsilon(x^2 - z^2)$, затем их сложим с учетом тождества $(x^1 - z^1)(y^1 - z^1) - \varepsilon(x^2 - z^2)(y^2 - z^2) = -P + f(xz)$. Умножим еще первое выражение из (13.1) на другую разность $x^1 - y^1$, а второе на $-\varepsilon(x^2 - y^2)$ и воспользуемся равенством

$$(x^1 - y^1)(y^1 - z^1) - \varepsilon(x^2 - y^2)(y^2 - z^2) = P - f(xy).$$

Умножим, наконец, первое выражение системы (13.2) на $x^1 - y^1$, а второе выражение на разность $-\varepsilon(x^2 - y^2)$, затем их сложим. В итоге получаем систему дифференциальных уравнений

$$-f(xz) = -2P \frac{\partial P}{\partial f(xy)} - 2(P - f(xz)) \frac{\partial P}{\partial f(yz)}, \\ -P = -2f(xy) \frac{\partial P}{\partial f(xy)} + 2(P - f(xy)) \frac{\partial P}{\partial f(yz)},$$

Поскольку функции $f(xy)$, $f(xz)$ и $f(yz)$ независимы, то полученная система дифференциальных уравнений совместна, причем определитель составленный из коэффициентов производных отличен от нуля. Разрешая ее относительно производных, приходим:

$$4S \frac{\partial S}{\partial f(xy)} = -\varepsilon[f(xz) + f(yz) - f(xy)],$$

$$4S \frac{\partial S}{\partial f(xz)} = -\varepsilon[f(xy) + f(yz) - f(xz)],$$

$$4S \frac{\partial S}{\partial f(yz)} = -\varepsilon[f(xz) + f(xy) - f(yz)].$$

Подставляя общее решение данной системы в функциональное уравнение (8), приходим к формуле Герона (10).

Докажем теперь вторую часть теоремы. Продифференцируем функциональное уравнение (9) по переменным y^1 и y^2 . Тогда приходим к системе равенств (13.1). Дифференцируя теперь уравнение (9) по z^1 и z^2 , получим выражения (13.2).

$$-f(xy) = -2P \frac{\partial P}{\partial f(xz)} - 2(P - f(xy)) \frac{\partial P}{\partial f(yz)}.$$

Разрешая последнюю систему относительно частных производных, приходим к новым уравнениям

$$\frac{\partial P}{\partial f(xy)} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial P}{\partial f(xz)} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial P}{\partial f(yz)} = -\frac{1}{2}.$$

Подставляя общее решение этой системы в исходное функциональное уравнение (9), приходим к формуле Герона (11). Этим самым теорема 1 доказана полностью. ■

4. Формулы Герона собственно гельмгольцевой, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей. В данном параграфе, операясь на результаты предыдущего, найдем формулы Герона собственно гельмгольцевой, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей. Рассмотрим вспомогательные трехточечные инварианты.

Лемма 2. *Трехточечные функции с открытой и плотной областью определения*

$$T(xyz) = \frac{(x^1 - y^1)(x^2 - z^2) - (x^1 - z^1)(x^2 - y^2)}{\sqrt{(x^1 - y^1)^2 - \delta(x^2 - y^2)^2} \sqrt{(x^1 - z^1)^2 - \delta(x^2 - z^2)^2}}, \quad (14.1)$$

$$H(xyz) = \frac{(x^1 - y^1)(x^1 - z^1) - \delta(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)}{\sqrt{(x^1 - y^1)^2 - \delta(x^2 - y^2)^2} \sqrt{(x^1 - z^1)^2 - \delta(x^2 - z^2)^2}} \quad (14.2)$$

являются инвариантами группы движений (3'), причем при $\delta = \varepsilon$ они инвариантны также относительно группы (2'), а при $\delta = 0$ — инвариантны относительно группы

$$x' = x + c, \quad y' = y + d. \quad (15)$$

Доказательство очевидно. ■

Инварианты T и P кратко можно записать еще так:

$$T(xyz) = \frac{S(xyz)}{\sqrt{f(xy)}\sqrt{f(xz)}}, \quad (14.1')$$

$$H(xyz) = \frac{P(xyz)}{\sqrt{f(xy)}\sqrt{f(xz)}}. \quad (14.2')$$

Теорема 2. Инвариант S при $\delta = \varepsilon$ через "расстояния" выражается по формуле:

$$S^2(xyz) = \varepsilon \frac{1}{4} [f^2(xy)e^{2\alpha(q-p)} + f^2(xz)e^{2\alpha(p-q)} + f^2(yz)e^{2\alpha(p+q-2r)} - 2f(xy)f(xz) - 2f(xy)f(yz)e^{2\alpha(q-r)} -$$

$$\frac{S^2(xyz)}{f(xy)f(xz)} = \varepsilon \frac{1}{4} \frac{d^2(xy) + d^2(xz) + d^2(yz) - 2d(xy)d(xz) - 2d(xy)d(yz) - 2d(xz)d(yz)}{d(xy)d(xz)},$$

где $d(xy)$ — "расстояние", определяемое формулой (2), то есть евклидово при $\varepsilon = -1$ и псевдоевклидово при $\varepsilon = 1$.

$$S^2(xyz) = \varepsilon \frac{1}{4} [d^2(xy) + d^2(xz) + d^2(yz) - 2d(xy)d(xz) - 2d(xy)d(yz) - 2d(xz)d(yz)] e^{2\alpha p} e^{2\alpha q}.$$

Раскрывая скобки и производя почленное умножение, получаем равенство (16).

Воспользуемся следующей леммой.

Лемма 3. Инвариантом группы (3') являются разность $p - q$, который можно выразить через "расстояния" (3).

Доказательство. Убедимся сначала в справедливости первой части утверждения. Очевидно следующее равенство:

$$p - q =$$

$$-2f(xz)f(yz)e^{2\alpha(p-r)}, \quad (16)$$

а при $\delta = 0$ через элементарные функции записать не удается; для инварианта P при $\delta = \varepsilon$ имеем выражение

$$P(xyz) = \frac{1}{2} [f(xy)e^{2\alpha(q-p)} + f(xz)e^{2\alpha(p-q)} - f(yz)e^{2\alpha(p+q-2r)}], \quad (17)$$

а при $\delta = 0$ —

$$P(xyz) = \sqrt{f(xy)f(xz)}, \quad (18)$$

где введены сокращающие обозначения:

$$p = \Phi_\delta \left(\frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1} \right), \quad q = \Phi_\delta \left(\frac{x^2 - z^2}{x^1 - z^1} \right),$$

$$r = \Phi_\delta \left(\frac{y^2 - z^2}{y^1 - z^1} \right).$$

Доказательство. Для поиска формул Герона функций S и P воспользуемся леммой 2. Установим сначала формулу Герона (16) при $\delta = \varepsilon$. При этом воспользуемся тем, что функция $T(xyz)$ является инвариантом группы движений (2'). Тогда квадрат инварианта (14.1') запишется так:

Разрешая последнее равенство относительно инварианта S^2 , приходим

$$= \Phi_\delta \left(\frac{(x^1 - y^1)(x^2 - z^2) - (x^1 - z^1)(x^2 - y^2)}{(x^1 - y^1)(x^1 - z^1) - \delta(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)} \right).$$

Данное равенство есть отношение двух инвариантов группы движений, поэтому оно также является инвариантом. Из общих соображений следует существование зависимости этого инварианта от "расстояний", но в явном виде не удается ее найти. ■

Вернемся к доказательству теоремы. Из леммы 3 следует, что формула (16) является формулой Герона.

Из леммы 3 также следует существование

формулы Герона для инварианта S дуально-гельмгольцевой плоскости, т. е. при $\delta = 0$, но в явном виде не удается его записать.

Найдем теперь формулу Герона (17) для инварианта P . Рассмотрим сначала случай, когда $\delta = \varepsilon$. Через расстояния (2) инвариант (14.2) можно записать еще так:

$$H(xyz) = \frac{1}{2} \frac{d(xy) + d(xz) - d(yz)}{\sqrt{d(xy)}\sqrt{d(xz)}} =$$

$$S^2 = \varepsilon \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(xy)e^{\alpha(q-p)} & f(xz)e^{\alpha(p-q)} \\ 1 & f(xy)e^{\alpha(q-p)} & 0 & f(yz)e^{\alpha(p+q-2r)} \\ 1 & f(xz)e^{\alpha(p-q)} & f(yz)e^{\alpha(p+q-2r)} & 0 \end{vmatrix}, \quad (16')$$

причем либо $\alpha = \gamma$ (собственно гельмгольцева плоскость), либо $\alpha = \beta$ (псевдогельмгольцева плоскость).

Библиографический список

1. Михайличенко Г.Г. Полиметрические геометрии. Новосибирск: НГУ, 2001.

$$= \frac{P(xyz)}{\sqrt{f(xy)}\sqrt{f(xz)}}.$$

Разрешая относительно P , приходим к формуле Герона (17).

Рассмотрим теперь случай $\delta = 0$. Из (14.2) следует, что $H(xyz) = 1$. Согласно (14.2') это приводит к формуле Герона (18). Теорема 2 доказана полностью. ■

Формулу Герона (16) можно записать еще в таком виде:

ГРУППОВОЙ АНАЛОГ КЛАССИФИКАЦИОННЫХ ЗАДАЧ В ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Г.Гельмгольц в его знаменитой работе "О фактах, лежащих в основании геометрии"[1] высказал предположение, что метрика n -мерного пространства не может быть произвольной, если в нем твердое тело имеет $n(n+1)/2$ степеней свободы. Но в таком случае между всеми взаимными расстояниями для $n+2$ точек твердого тела должна существовать функциональная связь, так как при ее отсутствии число степеней свободы $(n+2)$ -точечной жесткой фигуры с общим расположением точек, движение которой однозначно определяет движение всего твердого тела, уменьшится ровно на единицу. Таким образом, в n -мерной геометрии обнаруживает себя не только групповая симметрия, лежащая в основе "Эрлангенской программы" Ф.Клейна [2], но и феноменологическая симметрия, на которую впервые особое внимание обратил Ю.И.Кулаков [3], сделав ее основным принципом своей теории физических структур.

Для иллюстрации феноменологической и групповой симметрий в геометрии, а также связи между ними, рассмотрим плоскость Евклида. В декартовой прямоугольной системе координат (x, y) квадрат расстояния между любыми точками $i = (x_i, y_i)$ и $j = (x_j, y_j)$ задается функцией

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2. \quad (1)$$

Возьмем четыре произвольные точки i, j, k, l и запишем для них все шесть значений метрической функции (1): $f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl)$. Хорошо известно, что они функционально связаны, обращая в нуль определитель Кэли-Менгера пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(ij) & f(ik) & f(il) \\ 1 & f(ij) & 0 & f(jk) & f(jl) \\ 1 & f(ik) & f(jk) & 0 & f(kl) \\ 1 & f(il) & f(jl) & f(kl) & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

Геометрический смысл соотношения (2) состоит в том, что трехмерный объем тетраэдра с вершинами, лежащими на плоскости, равен нулю. По терминологии Ю.И.Кулакова [3] соотношение (2), справедливое для любой четверки $\langle ijkl \rangle$, выражает феноменологическую симметрию евклидовой плоскости.

По метрической функции (1) можно найти множество ее движений, то есть таких гладких

и обратимых преобразований

$$x' = \lambda(x, y), \quad y' = \sigma(x, y), \quad (3)$$

относительно которых она сохраняется. Действительно, если преобразование плоскости (3) является движением, то для его функций λ и σ получается функциональное уравнение

$$(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2,$$

все решения которого могут быть найдены чисто аналитически:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(x, y) &= x \cos \varphi - \varepsilon y \sin \varphi + \alpha, \\ \sigma(x, y) &= x \sin \varphi + \varepsilon y \cos \varphi + \beta, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $\varepsilon = +1$ для собственных движений, $\varepsilon = -1$ для несобственных, а α, β и φ — три независимые параметра, задающие параллельный перенос и поворот в плоскости Евклида.

Множество всех движений (3) с функциями (4) есть, очевидно, группа, выражающая групповую симметрию плоскости Евклида. С другой стороны, эта трехпараметрическая группа преобразований координатной плоскости (x, y) задает на ней по Ф.Клейну [2] евклидову геометрию.

Выясним, далее, имеется ли связь феноменологической и групповой симметрий для двумерной геометрии, задаваемой на плоскости невырожденной метрической функцией

$$f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \quad (5)$$

в которую координаты точек i и j входят существенным образом. Твердое тело на плоскости имеет три степени свободы. Возьмем жесткую фигуру из четырех точек i, j, k, l , каждая из которых задается двумя координатами, а вся фигура, соответственно, восемь. Шесть значений функции (5) для этой фигуры должны быть зависимы, так как, иначе, при ее движении число степеней свободы будет равно только двум: $8 - 6 = 2$. Таким образом для любой четверки $\langle ijkl \rangle$ должна существовать функциональная связь

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl)) = 0, \quad (6)$$

выражающая феноменологическую симметрию плоской геометрии с метрической функцией (5).

Аналогичные простые соображения приводят к выводу о том, что, если имеет место связь (6), то существует трехпараметрическая группа движений метрической функции (5):

$$x' = \lambda(x, y; a^1, a^2, a^3), \quad y' = \sigma(x, y; a^1, a^2, a^3), \quad (7)$$

относительно которой она является двухточечным инвариантом, удовлетворяя уравнению

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \lambda(j), \sigma(j)) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \quad (8)$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i; a^1, a^2, a^3)$. Множество всех движений (7) определяет групповую симметрию плоской геометрии с метрической функцией (5).

Приведенные выше соображения об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий применимы ко все известным двумерным геометриям: плоскости Лобачевского, плоскости Минковского, двумерной сфере, симплектической плоскости и т.д. Эта эквивалентность установлена автором [4] и для двумерных геометрий может быть выражена следующей теоремой:

Теорема 1. *Для того, чтобы невырожденная функция (5) задавала на плоскости двумерную феноменологически симметричную геометрию со связью (6), необходимо и достаточно, чтобы она допускала трехпараметрическую группу движений (7), являясь относительно нее по уравнению (8) двухточечным инвариантом.*

Заметим, что задачу определения всех плоских геометрий, в которых "положение фигуры задается тремя условиями", впервые четко сформулировал А.Пуанкаре в его известной работе "Об основных гипотезах геометрии"[5]. Классификация таких геометрий с метрической функцией (5) осуществлена автором [6] и приведена ниже в качестве иллюстрации и сопоставления различных методов исследования в теории физических структур.

Итак, двумерные геометрии на координатной плоскости (x, y) задаются метрической функцией (5), а ее феноменологическая симметрия выражается функциональной связью (6). Плоскость Евклида с метрической функцией (1) и функциональной связью (2), рассмотренная выше, является одной из таких геометрий. Но сколько их на плоскости может быть? На этот вопрос отвечает следующая теорема (см. [6]):

Теорема 2. *С точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ и в надлежаще выбранной системе локальных координат (x, y) невырожденная метрическая функция (5), задающая на плоскости двумерную феноменологически симметричную геометрию со связью (6), может быть представлена одним из следующих канонических выражений:*

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2, \quad (9)$$

$$f(ij) = \sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \cos y_i \cos y_j, \quad (10)$$

$$f(ij) = \operatorname{sh} y_i \operatorname{sh} y_j \cos(x_i - x_j) - \operatorname{ch} y_i \operatorname{ch} y_j, \quad (11)$$

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2, \quad (12)$$

$$f(ij) = \operatorname{ch} y_i \operatorname{ch} y_j \cos(x_i - x_j) - \operatorname{sh} y_i \operatorname{sh} y_j, \quad (13)$$

$$f(ij) = x_i y_j - x_j y_i, \quad (14)$$

$$f(ij) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \quad (15)$$

$$f(ij) = ((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2) \exp(2\beta \operatorname{ar}(\operatorname{c}) \operatorname{th} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}), \quad (16)$$

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 \exp(2\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}), \quad (17)$$

$$f(ij) = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \exp(2\gamma \operatorname{ar} \operatorname{ctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}), \quad (18)$$

$$f(ij) = \frac{(x_i - x_j)^2 + \varepsilon_i y_i^2 + \varepsilon_j y_j^2}{y_i y_j}, \quad (19)$$

где $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$, $\gamma > 0$, $\varepsilon_i = 0, \pm 1$, $\varepsilon_j = 0, \pm 1$, причем не обязательно $\varepsilon_i = \varepsilon_j$.

Выражения (9)–(14) определяют метрические функции хорошо известных плоских (двумерных) геометрий: (9) – плоскости Евклида, (10) – двумерной сферы, (11) – плоскости Лобачевского, (12) – плоскости Минковского, (13) – двумерного однополосного гиперboloида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, (14) – симплектической плоскости. Метрические функции (15), (16), (17), (18), по-видимому, до настоящего времени в геометрии не рассматривались. Выражение (19) определяет метрическую функцию на несвязном двумерном многообразии, на связных компонентах которого будет либо симплектическая плоскость ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = 0$), либо плоскость Лобачевского в модели Пуанкаре ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = +1$), либо двумерный однополостной

гиперболоид ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = -1$). Двумерную геометрию с метрической функцией (18) автор назвал *плоскостью Гельмгольца*, так как окружностью в ней является логарифмическая спираль, о чем кратко сообщает Гельмгольц [1], считая этот факт отрицательной характеристикой такой геометрии.

Профессор А.М.Широков (кафедра геометрии Казанского госуниверситета) обратил внимание автора на то, что три метрические функции (16), (17) и (18) можно записать единообразно, используя три типа комплексных чисел:

$$f(ij) = (z_i - z_j)\overline{(z_i - z_j)} \exp 2\gamma \arg(z_i - z_j)$$

где $z = x + ey$, $\bar{z} = x - ey$, причем $e^2 = +1$, $\gamma > 0$ и дополнительно $\gamma \neq 1$ для выражения (16); $e^2 = 0$ и $\gamma = 1$ для выражения (17); $e^2 = -1$ и $\gamma > 0$ для выражения (18). Таким образом, все три возможные типа комплексных чисел, а именно двойные ($e^2 = +1$), дуальные ($e^2 = 0$) и обычные ($e^2 = -1$) естественно вписались в полную классификацию двумерных феноменологически симметричных геометрий.

В работе [6] результаты (9)–(19) приведены без доказательства, которое оказалось слишком громоздким, поэтому ниже мы кратко изложим его основные идеи. Феноменологическая симметрия плоской (двумерной) геометрии означает, что шесть значений ее метрической функции:

$$f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl), \quad (20)$$

имеющих координатное представление (5) и соответствующих всем упорядоченным парам в четверке $\langle ijkl \rangle$, функционально связаны, то есть удовлетворяют некоторому уравнению (6). Шесть функций (20) зависят в общей сложности от восьми координат $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l$ четырех точек и потому связь (6) между ними возможна не всегда. То есть эта связь, в действительности является специфическим функциональным уравнением. Согласно известной теореме математического анализа для того, чтобы шесть метрических функций (20) от восьми координат были функционально связаны каким-либо уравнением (6), необходимо и достаточно, чтобы общий ранг матрицы Якоби для них:

$$\left\| \begin{array}{ccc|cc|cc} \frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} & \frac{\partial f(ik)}{\partial x_i} & \frac{\partial f(il)}{\partial x_i} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} & \frac{\partial f(ik)}{\partial y_i} & \frac{\partial f(il)}{\partial y_i} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial x_j} & \frac{\partial f(jl)}{\partial x_j} & 0 \\ \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial y_j} & \frac{\partial f(jl)}{\partial y_j} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f(ik)}{\partial x_k} & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial x_k} & 0 & \frac{\partial f(kl)}{\partial x_k} \\ 0 & \frac{\partial f(ik)}{\partial y_k} & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial y_k} & 0 & \frac{\partial f(kl)}{\partial y_k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f(il)}{\partial x_l} & 0 & \frac{\partial f(jl)}{\partial x_l} & \frac{\partial f(kl)}{\partial x_l} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f(il)}{\partial y_l} & 0 & \frac{\partial f(jl)}{\partial y_l} & \frac{\partial f(kl)}{\partial y_l} \end{array} \right\| \quad (21)$$

был равен пяти. А это означает, что любой определитель шестого порядка, полученный из матрицы (21) вычеркиванием каких-то двух ее строк, должен обращаться в нуль,

Рассмотрим сначала определитель, полученный из матрицы (21) вычеркиванием последних двух строк. Поскольку по всем восьми координатам четверки $\langle ijkl \rangle$ он тождественно обращается в нуль, зафиксируем в нем координаты точек k, l и разложим его по элементам первого столбца. В результате относительно функции $f(ij)$ получаем линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных

первого порядка, которое после введения удобных обозначений коэффициентов при производных можно записать в следующем виде:

$$A(i) \frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} + B(i) \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} + A(j) \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} + B(j) \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} = 0,$$

где, например, $A(i) = A(x_i, y_i)$. Полученное дифференциальное уравнение может быть решено методом характеристик:

$$f(ij) = \chi(\varphi(i) - \varphi(j), \psi(i), \psi(j)),$$

где $\chi(u, v, w)$ – произвольная функция трех переменных, а функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ независимы. После естественной замены координат $\varphi \rightarrow x$, $\psi \rightarrow y$ это решение запишется в более простом виде:

$$f(ij) = \chi(x_i - x_j, y_i, y_j). \quad (22)$$

которые, прежде всего, являются системой двух функциональных уравнений относительно функций $\mu, \nu, \lambda, \sigma$, так как в их левые части координаты x_i и x_j входят в виде разности $x_i - x_j$. Решив эти функциональные уравнения, превратим соотношения (23) в систему двух дифференциальных уравнений относительно функции $\chi(u, v, w)$. Решения последней и определяют всю совокупность метрических функций (9)–(19), задающих на плоскости двумерные феноменологически симметричные геометрии со связью (6). Наиболее сложный этап в изложенном кратко методе – нахождение явных выражений для четырех функций $\mu, \nu, \lambda, \sigma$ из системы функциональных уравнений (23), так они имеют большое число решений.

Согласно теореме 1 метрическая функция (5) допускает трехпараметрическую группу движений, то есть таких гладких и локально обратимых преобразований (7) с $\partial(\lambda, \sigma)/\partial(x, y) \neq 0$, которые по уравнению (8) ее сохраняют. Таким образом, метрическая функция является двухто-

Подставим решение (22) в матрицу (21) и рассмотрим другие два определителя шестого порядка, полученные вычеркиванием из нее первой, второй и первой, четвертой строк. Фиксируя в них координаты точек k, l , приходим к следующим двум соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \chi_w(ij)/\chi_u(ij) &= \mu(j) + \nu(j)(\lambda(i) - \lambda(j))/(\sigma(i) - \sigma(j)), \\ \chi_v(ij)/\chi_u(ij) &= -\mu(i) - \nu(i)(\lambda(i) - \lambda(j))/(\sigma(i) - \sigma(j)). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

чечным инвариантом группы своих движений. Если известно явное выражение (5) для метрической функции, то условие (8) ее сохранения представляет собой функциональное уравнение относительно множества ее движений (3), которое является группой. Если же, наоборот, задана трехпараметрическая группа преобразований (7), то условие (8) представляет собой функциональное уравнение относительно самой метрической функции (5).

Основной целью настоящей работы является воспроизведение методами теории групп Ли преобразований классификационных результатов теоремы 2, полученных ранее методами теории физических структур.

Пусть нулевым значениям параметров $a = (a^1, a^2, a^3)$ соответствует тождественное преобразование из группы (7). Тогда бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование, близкое к тождественному, запишется в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + \lambda_1(x, y)a^1 + \lambda_2(x, y)a^2 + \lambda_3(x, y)a^3, \\ y' &= y + \sigma_1(x, y)a^1 + \sigma_2(x, y)a^2 + \sigma_3(x, y)a^3, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где, например, $\lambda_1 = \partial\lambda/\partial a^1|_{a=0}$.

Операторы

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \lambda_1(x, y)\partial_x + \sigma_1(x, y)\partial_y, \\ X_2 &= \lambda_2(x, y)\partial_x + \sigma_2(x, y)\partial_y, \\ X_3 &= \lambda_3(x, y)\partial_x + \sigma_3(x, y)\partial_y, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, линейно независимы с постоянными коэффициентами, однозначно задают инфинитезимальные преобразования (24) и составляют естественный координатный базис трехмерной алгебры Ли преобразований плоскости.

Полная с точностью до изоморфизма классификация трехмерных вещественных абстрактных алгебр Ли была дана Бианки в 1918 г. Приведем ее здесь по монографии [7], записывая соответствующие выражения для трех возможных

коммутаторов $[X_1, X_2]$, $[X_3, X_1]$, $[X_2, X_3]$ базисных векторов X_1, X_2, X_3 :

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = 0, \quad [X_2, X_3] = 0; \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} [X_1, X_2] &= 0, \quad [X_3, X_1] = 0, \\ [X_2, X_3] &= X_1; \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} [X_1, X_2] &= 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \\ [X_2, X_3] &= X_1 + X_2; \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} [X_1, X_2] &= 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \\ [X_2, X_3] &= pX_2; \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} [X_1, X_2] &= 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \\ [X_2, X_3] &= X_2; \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1,$$

$$[X_2, X_3] = 0; \quad (31)$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \quad (32)$$

$$[X_2, X_3] = -X_2; \quad (33)$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_2, \quad (34)$$

$$[X_2, X_3] = -X_1 + qX_2; \quad (35)$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_2, \quad (36)$$

где $0 < p^2 < 1$ и $0 < q < 2$.

Теорема 3. *Базисные операторы (25) трехмерной алгебры Ли локальной группы Ли локальных преобразований двумерного многообразия (плоскости), имеющей в базисе X_1, X_2, X_3 структуру коммутационных соотношений (26)–(36), в надлежаще выбранной системе координат (x, y) задаются следующими выражениями:*

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = \lambda(y)\partial_x; \quad (26.1)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = -\partial_y; \quad (27.1)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\partial_x + \delta\partial_y; \quad (27.2)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x - \partial_y; \quad (28.1)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = (x+y)\partial_x + y\partial_y; \quad (28.2)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x + (1-p)y\partial_y; \quad (29.1)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + py\partial_y; \quad (29.2)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x; \quad (30.1)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + y\partial_y; \quad (30.2)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x + y\partial_y; \quad (31.1)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + \delta\partial_y; \quad (31.2)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x + 2y\partial_y; \quad (32.1)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x - y\partial_y; \quad (32.2)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = xy\partial_x + (1-xy + y^2)\partial_y; \quad (33.1)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -y\partial_x + (x+qy)\partial_y; \quad (33.2)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x,$$

$$X_3 = xy\partial_x + (1+y^2)\partial_y; \quad (34.1)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -y\partial_x + x\partial_y; \quad (34.2)$$

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \operatorname{tg} y \sin x \partial_x + \cos x \partial_y, \\ X_3 &= \operatorname{tg} y \cos x \partial_x - \sin x \partial_y; \end{aligned} \right\} \quad (35.1)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \sin x \partial_x, \quad X_3 = \cos x \partial_x; \quad (36.1)$$

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \sin x \partial_x + \cos x \partial_y, \\ X_3 &= \cos x \partial_x - \sin x \partial_y; \end{aligned} \right\} \quad (36.2)$$

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= -\operatorname{th} y \sin x \partial_x + \cos x \partial_y, \\ X_3 &= -\operatorname{th} y \cos x \partial_x - \sin x \partial_y; \end{aligned} \right\} \quad (36.3)$$

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= -\operatorname{cth} y \sin x \partial_x + \cos x \partial_y, \\ X_3 &= -\operatorname{cth} y \cos x \partial_x - \sin x \partial_y; \end{aligned} \right\} \quad (36.4)$$

где $0 < p^2 < 1$, $0 < q < 2$, $\lambda''(y) \neq 0$, δ – любое число.

Алгебра (32.2) есть алгебра движений плоскости Минковского, (34.2) – евклидовой плоскости, (35.1) – двумерной сферы, (36.2) – симплектической плоскости, (36.3) – однополостного двумерного гиперболоида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, (36.4) – плоскости Лобачевского, то есть двухполостного двумерного гиперболоида в том же пространстве, (27.1) – плоскости Галилея, (32.1) – антипсевдоевклидовой плоскости и т.д. Приведенные в теореме 3 результаты исчерпывают все трехмерные локальные группы Ли локальных преобразований плоскости, определяющие на ней все двумерные геометрии, удовлетворяющие двум гипотезам Пуанкаре [5]. Девять плоских геометрий Кэли-Клейна (см., например, [8]) естественно входят сюда как частный случай.

Заметим, что базисные операторы (27.1) и (27.2) с различными значениями постоянной δ , так же, как и базисные операторы (31.2), не могут быть сведены друг к другу никакой локально обратимой заменой координат на плоскости. То есть они определяют изоморфные с точностью до совпадения структурных констант в соответствующих базисах, но различные действия одной и той же трехмерной группы G^3 на плоскости. В классификации же самого С.Ли [9], проведенной им с точностью до подобия, допускающего автоморфизм, то есть переход в одной из сопоставляемых алгебр к другому базису с сохранением структурных констант, эти алгебры отождествляются и остаются только алгебры (27.1) и (31.2) с $\delta = 0$.

Базисные операторы (36.2), (36.3), (36.4) изоморфных алгебр Ли можно записать единообразно, если в выражениях для них произвести соответственно следующие замены координат:

$$\begin{aligned} \xi &= \sin x / (\cos x + 1), \quad \eta = \exp y / (\cos x + 1), \\ \xi &= \sin x / (\cos x - \operatorname{th} y), \quad \eta = 1 / (\cos x - \operatorname{th} y) \operatorname{ch} y, \\ \xi &= \sin x / (\cos x - \operatorname{cth} y), \quad \eta = 1 / (\cos x - \operatorname{cth} y) \operatorname{sh} y \end{aligned}$$

и возвратиться к их прежним обозначениям:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2}(1 + x^2 - \varepsilon y^2)\partial_x + xy\partial_y, \\ X_2 &= x\partial_x + y\partial_y, \\ X_3 &= \frac{1}{2}(1 - x^2 + \varepsilon y^2)\partial_x - xy\partial_y, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

где $\varepsilon = 0$ для (36.2), $\varepsilon = -1$ для (36.3) и $\varepsilon = +1$ для (36.4). Результаты теоремы 3 и методы их получения опубликованы автором в работе [10].

Подставим в уравнение (8) бесконечно малые преобразования (24) окрестностей $U(i)$ и $U(j)$ и продифференцируем его отдельно по каждому из независимых параметров a^1, a^2, a^3 , полагая затем в каждой из трех производных $a^1 = a^2 = a^3 = 0$. В результате относительно метрической функции (5), которая является двухточечным инвариантом группы преобразований (7), получаем систему трех линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} X_1(i)f(ij) + X_1(j)f(ij) &= 0, \\ X_2(i)f(ij) + X_2(j)f(ij) &= 0, \\ X_3(i)f(ij) + X_3(j)f(ij) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

с операторами (25), где, более подробно, $X_1(i) = \lambda_1(x_i, y_i)\partial/\partial x_i + \sigma_1(x_i, y_i)\partial/\partial y_i$. Согласно инфинитезимальному критерию инвариантности (см. [11], с.77) все решения системы (38) являются также решениями исходного функционального уравнения (8).

Базисные операторы $X_\alpha(i)$, где $\alpha = 1, 2, 3$, задают локальные преобразования окрестности $U(i)$, а операторы $X_\alpha(j)$ – окрестности $U(j)$. При нахождении метрической функции $f(ij)$ по уравнениям (38) рассматриваются преобразования окрестности $U(i) \times U(j)$, задаваемые операторами $X_\alpha(ij) = X_\alpha(i) + X_\alpha(j)$. Поскольку операторы $X_\alpha(i)$ и $X_\alpha(j)$ коммутируют между собой, соответствующие алгебры изоморфны алгебре с базисом $X_\alpha(ij)$ с точностью до совпадения структурных констант. Однако это вовсе не означает, что операторы $X_\alpha(i)$ и $X_\alpha(j)$ переходят друг в друга при некотором локальном диффеоморфизме $U(i) \rightarrow U(j)$. Поэтому, если, например, имеются две изоморфные, но различные

трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости, то двухточечный инвариант $f(ij)$ необходимо искать для всех трех принципиально различных сочетаний базисных операторов $X_\alpha(i)$ и $X_\alpha(j)$ в системе (38). Заметим, что в двойной нумерации результатов теоремы 3 первые цифры одинаковы для изоморфных алгебр, базисные операторы которых не сводятся друг к другу никакой локально обратимой заменой координат $x \rightarrow \varphi(x, y), y \rightarrow \psi(x, y)$.

Лемма. Если группе преобразований некоторой окрестности $U \subset \mathfrak{M}$ соответствует алгебра Ли с базисными операторами X_1, X_2, X_3 из списка (26.1)–(36.4) классификационной теоремы 3, причем $X_1 = \partial_x, X_2 = y\partial_x$ или $X_1 = \partial_x, X_2 = \sin x\partial_x$, то любой ее двухточечный инвариант вырожден.

Запишем первые два уравнения системы (38) с этими операторами:

$$\left. \begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j &= 0, \\ y_i \partial f(ij)/\partial x_i + y_j \partial f(ij)/\partial x_j &= 0, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j &= 0, \\ \sin x_i \partial f(ij)/\partial x_i + \sin x_j \partial f(ij)/\partial x_j &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Обе системы имеют ранг равный двум, поэтому $\partial f(ij)/\partial x_i = 0, \partial f(ij)/\partial x_j = 0$ и их общее решение не зависит от координат x_i и x_j :

$$f(ij) = \chi(y_i, y_j).$$

Ясно, что такой двухточечный инвариант вырожден. Лемма доказана.

Таким образом, при нахождении двухточечных инвариантов трехпараметрических групп преобразований плоскости как решений систем уравнений (38) те алгебры Ли, у которых либо $X_1 = \partial_x, X_2 = y\partial_x$, либо $X_1 = \partial_x, X_2 = \sin x\partial_x$, то есть алгебры (26.1)–(34.1), (36.1), можно не рассматривать.

Теорема 4. Невырожденные двухточечные инварианты трехпараметрических групп Ли локальных преобразований плоскости с точностью до масштабной функции $\psi(f) \rightarrow f$ и в надлежаще выбранной системе локальных координат (x, y) совпадают с метрическими функциями (9)–(19), задающими на ней двумерные феноменологически симметричные геометрии со связью (6).

Доказательство теоремы 4 состоит в последовательном решении систем уравнений (38) для

тринадцати алгебр: (27.2)–(34.2), (35.1), (36.2), (36.3), (36.4), (35), а так же указания масштабной функции и замены координат на плоскости, которые приведут к совпадению решения системы с метрической функцией из списка (9)–(19) теоремы 2. В силу прозрачности метода автор считает разумным из тринадцати систем уравнений (38) рассмотреть только пять, решение которых провести последовательно до конечного сопоставления.

Запишем систему уравнений (38) с операторами (27.2):

$$\left. \begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j &= 0, \\ \partial f(ij)/\partial y_i + \partial f(ij)/\partial y_j &= 0, \\ y_i \partial f(ij)/\partial x_i + \delta \partial f(ij)/\partial y_i + \\ + y_j \partial f(ij)/\partial x_j + \delta \partial f(ij)/\partial y_j &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Из первых двух уравнений легко находим:

$$f(ij) = \chi(x_i - x_j, y_i - y_j), \quad (40)$$

где $\chi(u, v)$ – произвольная гладкая функция двух переменных

$$u = x_i - x_j, \quad v = y_i - y_j. \quad (41)$$

Подставляя результат (40) в третье уравнение системы (39), получаем $v\chi_u(u, v) = 0$, то есть $\chi_u(u, v) = 0$ и $\chi(u, v) = \psi(v)$, где ψ – произвольная функция одной переменной. Двухточечный инвариант (40) с такой функцией $\chi(u, v)$ явно вырожден, так как в нем нет зависимости от координат x_i и x_j :

$$f(ij) = \psi(y_i - y_j). \quad (42)$$

Запишем систему уравнений (38) с операторами (28.2):

$$\left. \begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j &= 0, \\ \partial f(ij)/\partial y_i + \partial f(ij)/\partial y_j &= 0, \\ (x_i + y_i) \partial f(ij)/\partial x_i + \\ + y_i \partial f(ij)/\partial y_i + (x_j + y_j) \partial f(ij)/\partial x_j + \\ + y_j \partial f(ij)/\partial y_j &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Общее решение первых двух уравнений системы (43) задается выражением (40). Подставляя его в ее третье уравнение, получаем уравнение для функции $\chi(u, v)$:

$$(u + v)\chi_u(u, v) + v\chi_v(u, v) = 0,$$

решение которого легко находится методом характеристик:

$$\chi(u, v) = \psi(v^2 \exp(-2u/v)), \quad (44)$$

где ψ есть уже произвольная функция одной переменной. По решениям (40), (44) и обозначению (41) получаем двухточечный инвариант

$$f(ij) = \psi((y_i - y_j)^2 \exp(-2(x_i - x_j)/(y_i - y_j))), \quad (45)$$

который явно невырожден. Инвариант (45) эквивалентен метрической функции (17), переходящей в него при локальном диффеоморфизме $f \rightarrow \psi(f)$ и замене координат $x \rightarrow y, y \rightarrow -x$. Заметим, что плоскость с такой метрической функцией в геометрии не рассматривалась.

Запишем систему уравнений (38) с операторами (29.2):

$$\left. \begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j &= 0, \\ \partial f(ij)/\partial y_i + \partial f(ij)/\partial y_j &= 0, \\ x_i \partial f(ij)/\partial x_i + p y_i \partial f(ij)/\partial y_i + \\ + x_j \partial f(ij)/\partial x_j + p y_j \partial f(ij)/\partial y_j &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

причем $0 < p^2 < 1$. Общее решение первых двух уравнений системы (46) задается выражением (40). Подставляя его в ее последнее уравнение, получаем уравнение для функции χ :

$$u\chi_u(u, v) + p v\chi_v(u, v) = 0,$$

которое легко интегрируется методом характеристик:

$$\chi(u, v) = \psi(u^p/v), \quad (47)$$

где ψ – произвольная функция одной переменной. По решениям (40), (47) и обозначению (41) получаем невырожденный двухточечный инвариант

$$f(ij) = \psi\left(\frac{(x_i - x_j)^p}{y_i - y_j}\right), \quad (48)$$

который эквивалентен метрической функции (16), переходя в нее при замене координат $x \rightarrow x - y, y \rightarrow x + y$, введении нового параметра $\beta = (1 + p)/(1 - p)$, причем $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$, и следующем локальном диффеоморфизме: $f \rightarrow (\psi^{-1}(f))^{2/(p-1)}$, если

$$|(y_i - y_j)/(x_i - x_j)| < 1$$

и

$$f \rightarrow ((-1)^{(p+1)/2} \psi^{-1}(f))^{2/(p-1)},$$

если $|(y_i - y_j)/(x_i - x_j)| > 1$. В первом случае в показатель экспоненты выражения (16) для метрической функции входит гиперболический арктангенс (arth), а во втором – гиперболический аркоктангенс (arcth).

Плоскость с метрической функцией (48) в геометрии рассматривалась только для $p = 1/2$ и $\psi(t) = 1/t^2$, когда она становится финслеровой: $df = dy^2/dx$, причем при переходе

$dx \rightarrow \lambda dx$, $dy \rightarrow \lambda dy$ имеем $df \rightarrow \lambda df$, то есть локально выполняется условие ее однородности.

Система уравнений (38) с операторами (30.2) может быть получена из системы (46), если в ней положить $p = +1$. С другой стороны, при ее интегрировании условие $p \neq +1$ не было использовано. В результате, полагая в решении (48) $p = +1$, получаем невырожденный двухточечный инвариант

$$f(ij) = \psi \left(\frac{x_i - x_j}{y_i - y_j} \right). \quad (49)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j &= 0, \\ \text{tg } y_i \sin x_i \partial f(ij)/\partial x_i + \cos x_i \partial f(ij)/\partial y_i + \text{tg } y_j \sin x_j \partial f(ij)/\partial x_j + \cos x_j \partial f(ij)/\partial y_j &= 0, \\ \text{tg } y_i \cos x_i \partial f(ij)/\partial x_i - \sin x_i \partial f(ij)/\partial y_i + \text{tg } y_j \cos x_j \partial f(ij)/\partial x_j - \sin x_j \partial f(ij)/\partial y_j &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Общее решение первого уравнения системы (50) задается, очевидно, следующим выражением:

$$f(ij) = \Theta(x_i - x_j, y_i, y_j), \quad (51)$$

где $\Theta(u, v, w)$ – произвольная гладкая функция трех переменных. Подставим это выражение во второе и третье уравнения системы (50). Затем умножим второе уравнение на $\cos x_i$ (соответственно, на $\cos x_j$) и сложим с третьим, умноженным на $-\sin x_j$ (соответственно, на $-\sin x_i$). В результате получаем систему двух уравнений для функции $\Theta(u, v, w)$:

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } v \sin u \Theta_u + \cos u \Theta_v + \Theta_w &= 0, \\ \text{tg } w \sin u \Theta_u + \Theta_v + \cos u \Theta_w &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

где, напомним,

$$u = x_i - x_j, \quad v = y_i, \quad w = y_j. \quad (53)$$

Умножим, далее, первое уравнение системы (54) на $\text{tg } w$ и сложим со вторым, умноженным на $-\text{tg } v$:

$$(\text{tg } w \cos u - \text{tg } v) \Theta_v - (\text{tg } v \cos u - \text{tg } w) \Theta_w = 0.$$

Это последнее уравнение решается методом характеристик:

$$\Theta(u, v, w) = \chi(u, \cos v \cos w \cos u + \sin v \sin w),$$

Инвариант (49) эквивалентен метрической функции (15), переходящей в него при локальном диффеоморфизме $f \rightarrow \psi(f^{-1})$. Плоскость с такой метрической функцией в геометрии не изучалась.

Запишем систему уравнений (38) с операторами (35.1);

где $\chi(s, t)$ – произвольная функция двух переменных. Подставим полученное решение в первое уравнение системы (56): $\chi_s(s, t) = 0$, то есть

$$\Theta(u, v, w) = \psi(\cos v \cos w \cos u + \sin v \sin w), \quad (54)$$

где ψ – произвольная функция только одной переменной. По решениям (51), (54) и обозначению (53) находим невырожденный двухточечный инвариант

$$\begin{aligned} f(ij) = \psi(\cos y_i \cos y_j \cos(x_i - x_j) + \\ + \sin y_i \sin y_j), \end{aligned} \quad (55)$$

который эквивалентен метрической функции (10), переходящей в него при локальном диффеоморфизме $f \rightarrow \psi(f)$ и замене координат $x \rightarrow x$, $y \rightarrow (\pi - 2y)/2$. Заметим, что выражение (10) определяет метрическую функцию двумерной сферы единичного радиуса в трехмерном евклидовом пространстве.

Запишем систему уравнений (38) с операторами (37):

$$\left. \begin{aligned} (1 + x_i^2 - \varepsilon_i y_i^2) \partial f(ij)/\partial x_i + 2x_i y_i \partial f(ij)/\partial y_i + \\ + (1 + x_j^2 - \varepsilon_j y_j^2) \partial f(ij)/\partial x_j + 2x_j y_j \partial f(ij)/\partial y_j &= 0, \\ x_i \partial f(ij)/\partial x_i + y_i \partial f(ij)/\partial y_i + \\ + x_j \partial f(ij)/\partial x_j + y_j \partial f(ij)/\partial y_j &= 0, \\ (1 - x_i^2 + \varepsilon_i y_i^2) \partial f(ij)/\partial x_i - 2x_i y_i \partial f(ij)/\partial y_i + \\ + (1 - x_j^2 + \varepsilon_j y_j^2) \partial f(ij)/\partial x_j - 2x_j y_j \partial f(ij)/\partial y_j &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

где $\varepsilon_i = 0, \pm 1$; $\varepsilon_j = 0, \pm 1$, причем не обязательно $\varepsilon_i = \varepsilon_j$. Сложим первое и третье уравнения системы (56):

$$\partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j = 0,$$

откуда следует, что координаты x_i и x_j входят в инвариант $f(ij)$ в виде разности $x_i - x_j$. Общее решение системы (56) будем искать в следующем виде:

$$f(ij) = \Theta \left(\frac{(x_i - x_j)^2 + \varepsilon_i y_i^2 + \varepsilon_j y_j^2}{y_i y_j}, y_i, y_j \right), \quad (57)$$

где $\Theta(u, v, w)$ – гладкая функция трех переменных

$$u = \left. \begin{aligned} &((x_i - x_j)^2 + \varepsilon_i y_i^2 + \varepsilon_j y_j^2)/y_i y_j, \\ &v = y_i, \quad w = y_j, \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

поскольку дробный аргумент в ней, как легко проверить, является одним из решений.

Подставим выражение (57) в первое и второе уравнения системы (56):

$$\left. \begin{aligned} x_i y_i \Theta_v + x_j y_j \Theta_w &= 0, \\ y_i \Theta_v + y_j \Theta_w &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда следует, что $\Theta_v = 0$, $\Theta_w = 0$ и потому

$$\Theta(u, v, w) = \psi(u), \quad (59)$$

где ψ – произвольная функция одной переменной. По решениям (57), (59) и обозначению (58) получаем невырожденный двухточечный инвариант

$$f(ij) = \psi(((x_i - x_j)^2 + \varepsilon_i y_i^2 + \varepsilon_j y_j^2)/y_i y_j), \quad (60)$$

который эквивалентен метрической функции (19), переходящей в него при локальном диффеоморфизме $f \rightarrow \psi(f)$. Теорема 4 доказана.

В работе [12] автором были найдены все двухточечные инварианты как решения системы (38) для всевозможных изоморфных алгебр Ли с базисными операторами $X_\alpha(i)$ и $X_\alpha(j)$, где $\alpha = 1, 2, 3$, взятыми из полного списка теоремы 3. Многие из таких систем в настоящем параграфе не рассматривались по условиям леммы о вырождении двухточечного инварианта, доказанной перед теоремой 4. Например, система (38) с операторами (32.1) и (32.2) имеет решение

$$f(ij) = \psi((x_i - x_j - y_i y_j)/\sqrt{y_i}), \quad (61)$$

в то время как с операторами (32.1) ее решение другое:

$$f(ij) = \psi(y_i/y_j), \quad (62)$$

в котором отсутствуют координаты x_i и x_j . С операторами же (32.2) решение этой системы будет следующим:

$$f(ij) = \psi(1/(x_i - x_j)(y_i - y_j)). \quad (63)$$

Пусть двумерное многообразие \mathfrak{M} несвязно и преобразование его различных компонент задается изоморфными, но различными алгебрами Ли с базисными операторами (32.1) и (32.2). Тогда в целом двухточечный инвариант представляется совокупностью трех решений (61), (62), (63) и оказывается вырожденным, так как для той компоненты многообразия, преобразование которой задается алгеброй Ли с базисными операторами (32.1), в решении (62) нет координат x_i и x_j . Заметим, что в аналогичных условиях двухточечный инвариант (60) невырожден как "внутри" каждой из компонент многообразия, так и "между", когда точки i и j находятся в разных его компонентах.

Библиографический список

1. Гельмгольц Г. О фактах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. М.: 1956. С.366-388.
2. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований ("Эрлангская программа") // Об основаниях геометрии. М.: 1956. С.402-434
3. Кулаков Ю.И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур // Докл. АН СССР, 1970. Т.193. №5. С.985-987.
4. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметрии в геометрии // Докл. АН СССР, 1983. Т.269. №2. С.284-288.
5. Пуанкаре А. Об основных гипотезах геометрии // Об основаниях геометрии. М.: 1956. С.388-398.
6. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии // Докл. АН СССР, 1981, Т.260, №4, С.803-805 (Mikhaylitchenko G.G. Geometries a deux dimensions dans la theorie de structures physiques // Comptes Rendus de L'Acad. des Sciences, Paris, 16 novembre, 1981. Т.293. Serie 1. P.529-531).
7. Петров А.З. Новые методы в общей теории

- относительности. М.: Наука, 1966.
8. Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. М.: Наука, 1969.
 9. Lie S., Engel F. Theorie der Transformationsgruppen, Bd 3, Leipzig: Teubner, 1893.
 10. Михайличенко Г.Г. Трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости // Сиб.мат.журн. 1982. Т.23, №5. С.132-141.
 11. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. М.: ИЛ, 1947.
 12. Михайличенко Г.Г. Метрика плоскости как двухточечный инвариант / Ред. "Сиб.мат.журн.", 1984, 38с, деп. в ВИНТИ 30.10.84, №6980-84 (Реферат // Сиб.мат.журн. 1985. Т.26, №5. С.198).

ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ПРЕДЕЛЫ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ С АКСИОМАМИ СЧЕТНОСТИ

1

1°. Основные сведения о пределах многозначных отображений.

Множества будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита: $G, K, L \dots$, а их элементы - малыми буквами латинского алфавита: $x, y, z \dots$. Будем предполагать известными основные понятия теории множеств такие, как "пустое множество", "подмножество", "объединение", "пересечение", "разность", которые будем обозначать символами: $\emptyset, \subset, \cup, \cap, -$, соответственно. Дополнение множества A в универсальном множестве обозначим CA . Пересечение, объединение множеств некоторого семейства $\{F_\alpha | \alpha \in \mathfrak{S}\}$ будем обозначать соответственно: $\bigcap F_\alpha, \bigcup F_\alpha$.

Пусть $F : X \rightarrow Y$ — многозначное отображение (м.о.), сопоставляющее каждой точке $x \in X$ некоторое подмножество $F(x)$ в Y — ее образ. В множествах X и Y заданы топологии σ и τ соответственно. Порождаемые ими системы окрестностей (открытых) в точках $x \in X, y \in Y$ будем обозначать через $\sigma(x)$ и $\tau(y)$ соответственно. Точку x назовем предельной точкой множества A , если в любой ее окрестности имеется точка множества A отличная от x . Совокупность предельных точек множества A будем обозначать A^d . В случае, если x — предельная точка множества $A \subset X$, систему проколотых окрестностей точки x на A , (т.е. окрестностей с удаленной из них точкой x), обозначим символом $\sigma_A(x)$:

$$\sigma_A(x) = \{V \cap A - \{x\} | V \in \sigma(x)\}.$$

Нижним пределом м.о. F по множеству A в точке $x \in A^d$ назовем множество

$$\underline{F}_A(x) = \{y \in Y |$$

$$(\forall U \in \tau(y)) (\exists V \in \sigma_A(x)) (\forall y \in V) (F(y) \cap U \neq \emptyset)\}.$$

Верхним пределом м.о. F по множеству A в точке $x \in A^d$ назовем множество

$$\overline{F}_A(x) = \bigcup_{G \in \mathfrak{R}_A(x)} \underline{F}_G(x),$$

где $\mathfrak{R}_A(x)$ — класс всех подмножеств множества A , имеющих x своей предельной точкой.

Если $\underline{F}_A(x) = \overline{F}_A(x)$, то нижний предел $\underline{F}_A(x)$ называется пределом м.о. F в точке x по множеству A . Обозначим $lt_A F(x)$. Для $A = X$ будем использовать упрощенные обозначения: $\underline{F}(x), \overline{F}(x), lt F(x)$.

Заметим, что пределы в точке определяются лишь системой окрестностей в данной точке, образующих фильтр (открытые окрестности составляют его базу.) Если в качестве X взять множество натуральных чисел N , пополненное несобственной точкой ∞ с системой ее окрестностей $V_n = N - \{1, \dots, n\}$, $n \in N$, то пределы $\underline{F}(\infty), \overline{F}(\infty), lt F(\infty)$ м.о. $F : X \rightarrow Y$ соответственно совпадают с введенными ранее ([1], с. 341 - 348) пределами последовательности множеств (F_i) . В случае существования предела $lt F(\infty) = F$ говорят, что последовательность множеств (F_i) сходится к F .

Свойства нижних и верхних пределов м.о. в точке рассмотрены автором в [2]. Сформулируем некоторые из них.

Предложение 1. [2]

1. Если F — стационарное м.о.: $F(x) = F$ для всех $x \in X$, то

$$\underline{F}_A(x) = \overline{F}_A(x) = cl F.$$

2. Если K, F — два м.о. из X в Y , причем $K(x) \subset F(x)$ для всех $x \in X$, то

$$\underline{K}_A(x) \subset \underline{F}_A(x), \quad \overline{K}_A(x) \subset \overline{F}_A(x).$$

3. Если $F : X \rightarrow Y$ — м.о., $A \subset G$ и $x \in A^d$, то $x \in G^d$ и

$$\underline{F}_G(x) \subset \underline{F}_A(x), \quad \overline{F}_A(x) \subset \overline{F}_G(x).$$

4.

$$\underline{F}_A(x) \subset \overline{F}_A(x).$$

5.

$$\overline{F}_G(x) \subset \bigcap_{V \in \sigma_G(x)} cl \left[\bigcup_{y \in V} F(y) \right].$$

В данной работе мы выявим новые свойства пределов, обусловленные введением аксиом счетности в топологическое пространство Y . Напомним их:

¹Работа поддержана грантом РФФИ (код 02-01-01071).

1-ая : в каждой точке пространства существует счетная локальная база окрестностей.

2-ая : существует счетная база окрестностей.

Последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ элементов из множеств $G_1, G_2, \dots, G_n \dots$ соответственно (возможно $G_1 = G_2 = \dots$) будем обозначать $(x_i \in G_i)_{i=1}^{\infty}$ или более кратко $(x_i \in G_i)$, если не возможны недоразумения. Последовательность $(x_i \in G)$ называется сходящейся к элементу $x \in G$, если всякая окрестность $U \in \sigma_G(x)$ содержит все члены последовательности, начиная с некоторого номера. Обозначим: $(x_i) \rightarrow x$.

В дальнейшем нам будет полезно следующее утверждение.

Предложение 2. ([3], с. 129)

а). Если в точке x существует счетная локальная база окрестностей, то существует счетная база окрестностей $(V_i)_{i=1}^{\infty}$, обладающая свойством:

$$V_1 \supset V_2 \dots \supset V_i \supset \dots \quad (1)$$

б). Всякая последовательность точек $(x_i \in V_i)$ сходится к x .

Теорема 1.

$$\underline{F}_G(x) = \bigcap_{A \in \mathfrak{R}_G(x)} \overline{F}_A(x). \quad (2)$$

Доказательство.

По предл. 1(3, 4) для любого $A \in \mathfrak{R}_G(x)$ справедливы соотношения:

$$\underline{F}_G(x) \subset \underline{F}_A(x) \subset \overline{F}_A(x).$$

Поэтому

$$\underline{F}_G(x) \subset \bigcap_{A \in \mathfrak{R}_G(x)} \overline{F}_A(x).$$

Установим обратное включение:

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{R}_G(x)} \overline{F}_A(x) \subset \underline{F}_G(x)$$

или равносильное ему:

$$C[\underline{F}_G(x)] \subset C \left[\bigcap_{A \in \mathfrak{R}_G(x)} \overline{F}_A(x) \right],$$

а с учетом закона Моргана — такое:

$$C[\underline{F}_G(x)] \subset \bigcup_{A \in \mathfrak{R}_G(x)} C[\overline{F}_A(x)]. \quad (3)$$

Пусть $z \in C[\underline{F}_G(x)]$. Тогда найдется окрестность $U \in \tau(z)$ точки z такая, что для любой окрестности $V \in \sigma_G(x)$ имеется точка x_V такая, что $F(x_V) \cap U = \emptyset$, т.е. $F(x_V) \subset CU$. Пусть A — множество всех таких точек $x_V, V \in \sigma_G(x)$. Ясно, что $A \in \mathfrak{R}_G(x)$. Тогда для всех $y \in A$ выполняется: $F(y) \subset CU$. Определим стационарное отображение $K : X \rightarrow Y$ формулой: $K(y) = CU$ для всех $y \in X$. Поскольку $F(y) \subset K(y)$ для всех $y \in A$, то по предл. 1(2) имеем: $\overline{F}_A(x) \subset \overline{K}_A(x)$. Но по предл. 1(1) $\overline{K}_A(x) = cl(CU)$. Так как U — открытое множество, то его дополнение CU замкнуто в Y и $cl(CU) = CU$. Таким образом, $\overline{F}_A(x) \subset CU$ и, значит, $U \subset C[\overline{F}_A(x)]$. В свою очередь

$$C[\overline{F}_A(x)] \subset \bigcup_{A \in \mathfrak{R}_G(x)} C[\overline{F}_A(x)].$$

Следовательно

$$z \in \bigcup_{A \in \mathfrak{R}_G(x)} C[\overline{F}_A(x)].$$

Включение (3) доказано, а вместе с ним и формула (2).

2°. Пределы по фильтрам окрестностей, обладающих счетной базой.

Начиная с этого пункта и до конца статьи, в формулировках утверждений предполагается, что $F : X \rightarrow Y$ — м.о., $G \subset X$, $x \in G^d$, локальный вес пространства X в точке $x \in G^d$ счетен.

Теорема 2.

$$\underline{F}_G(x) = \bigcap_{A \in \mathfrak{R}} \overline{F}_A(x),$$

$$\overline{F}_G(x) = \bigcup_{A \in \mathfrak{R}} \underline{F}_A(x),$$

где \mathfrak{R} — множество всех сходящихся к x последовательностей $A = (x_i \in G - \{x\})$.

Доказательство.

Поскольку локальный вес пространства X в точке $x \in G^d$ счетен, то существует счетная база $\{V_i\}$ окрестностей точки x в X такая, что выполнено условие (1)(предл. 2(а)). Пусть A — произвольное множество из $\mathfrak{R}_G(x)$. В силу того, что $x \in G^d$, в каждом множестве $V_i \cap A$ найдется точка x_i отличная от x . Таким образом, каждому множеству A мы можем сопоставить последовательность $\tilde{A} = (x_i)$, сходящуюся к x (предл. 2(б)). Хотя способов сопоставления множеству A последовательности \tilde{A} много, мы фиксируем

один из них, так что последовательность \tilde{A} однозначно соответствует множеству A . Пусть \mathfrak{R} - класс всех таких последовательностей A , определенных для всех множеств $A \in \mathfrak{R}_G(x)$, \mathfrak{R} - множество всех сходящихся к x последовательностей. Ясно, что $\tilde{\mathfrak{R}} \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}_G(x)$. Поэтому, принимая во внимание теор. 1, можем записать:

$$\begin{aligned} \bigcup_{\tilde{A} \in \tilde{\mathfrak{R}}} \underline{F}_{\tilde{A}}(x) &\subset \bigcup_{A \in \mathfrak{R}} \underline{F}_A(x) \subset \\ &\subset \bigcup_{A \in \mathfrak{R}_G(x)} \underline{F}_A(x) = \overline{F}_G(x), \quad (4) \\ \underline{F}_G(x) &= \bigcap_{A \in \mathfrak{R}_G(x)} \overline{F}_A(x) \subset \bigcap_{A \in \mathfrak{R}} \overline{F}_A(x) \subset \\ &\subset \bigcap_{\tilde{A} \in \tilde{\mathfrak{R}}} \overline{F}_{\tilde{A}}(x). \quad (5) \end{aligned}$$

Так как $\tilde{A} \subset A$ для всех $A \in \mathfrak{R}_G(x)$, то в силу предл. 1(3) справедливы соотношения:

$$\underline{F}_A(x) \subset \underline{F}_{\tilde{A}}(x), \quad \text{и} \quad \overline{F}_{\tilde{A}}(x) \subset \overline{F}_A(x).$$

Тогда

$$\bigcup_{A \in \mathfrak{R}_G(x)} \underline{F}_A(x) \subset \bigcup_{\tilde{A} \in \tilde{\mathfrak{R}}} \underline{F}_{\tilde{A}}(x), \quad (6)$$

$$\bigcap_{\tilde{A} \in \tilde{\mathfrak{R}}} \overline{F}_{\tilde{A}}(x) \subset \bigcap_{A \in \mathfrak{R}_G(x)} \overline{F}_A(x). \quad (7)$$

Сопоставление формул (4)-(7) приводит к требуемому результату:

$$\underline{F}_G(x) = \bigcap_{\tilde{A} \in \tilde{\mathfrak{R}}} \overline{F}_{\tilde{A}}(x) = \bigcap_{A \in \mathfrak{R}_G(x)} \overline{F}_A(x).$$

$$\overline{F}_G(x) = \bigcup_{\tilde{A} \in \tilde{\mathfrak{R}}} \underline{F}_{\tilde{A}}(x) = \bigcup_{A \in \mathfrak{R}_G(x)} \underline{F}_A(x).$$

Теорема 2 доказана.

Следствие. Предел $lt_G F(x)$ существует и равен F тогда и только тогда, когда для любой сходящейся к x последовательности точек $(x_i \in G - \{x\})$ последовательность множеств $(F(x_i))$ сходится к F .

Доказательство.

Пусть существует предел $lt_G F(x) = F$. Поскольку всякая последовательность $A = (x_i \in G - \{x\})$, сходящаяся к x , принадлежит семейству $\mathfrak{R}_G(x)$, то определены нижние и верхние пределы $\underline{F}_A(x)$ и $\overline{F}_A(x)$, для которых в силу предл. 1(3,4) выполняются включения

$$\underline{F}_G(x) \subset \underline{F}_A(x) \subset \overline{F}_A(x) \subset \overline{F}_G(x).$$

Поэтому равенство:

$$\underline{F}_G(x) = \overline{F}_G(x) = F$$

влечет:

$$\underline{F}_A(x) = \overline{F}_A(x) = F,$$

т.е. $lt_A F(x) = F$.

Обратное утверждение непосредственно вытекает из теоремы 2.

Лемма 1.

а). Точка $z \in C[\underline{F}_G(x)]$ тогда и только тогда, когда существует окрестность $U \in \tau(z)$ и последовательность точек $(x_i \in G - \{x\})$, сходящаяся к x , такие, что $F(x_i) \cap U = \emptyset$ для всех $i = 1, 2, \dots$

б). Точка $z \in C[\overline{F}_G(x)]$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности A точек из X , сходящейся к x , найдутся окрестность $U_A \in \tau(z)$ и подпоследовательность (x_i) последовательности A такие, что $F(x_i) \cap U_A = \emptyset$ для всех $i = 1, 2, \dots$

Доказательство.

а). Пусть $z \in C[\underline{F}_G(x)]$. Это означает, что найдется окрестность $U \in \tau(z)$ такая, что в любой окрестности $V \in \sigma_G(x)$ имеется точка $x_V \in G$ такая, что $F(x_V) \cap U = \emptyset$. Так как локальный вес пространства X в точке x счетен, то существует счетная система окрестностей $(V_i \in \sigma_G(x))$ такая, что $V_1 \supset V_2 \supset \dots$. В каждой окрестности V_i существует точка x_i такая, что $F(x_i) \cap U = \emptyset$. По предл. 2(б) $(x_i) \rightarrow x$. Остается заметить, что $x_i \in G - \{x\}$ для всех $i = 1, 2, \dots$. Утверждение в одну сторону доказано.

Пусть теперь имеются окрестность $U \in \tau(z)$ и последовательность $(x_i \in G - \{x\})$, сходящаяся к x , такие, что $F(x_i) \cap U = \emptyset$ для всех $i = 1, 2, \dots$. Если допустить, что $z \in \underline{F}_G(x)$, то найдется окрестность $V \in \sigma_G(x)$ такая, что для всех $y \in V$ справедливо: $F(y) \cap U \neq \emptyset$. Так как последовательность $(x_i) \rightarrow x$, то, начиная с некоторого номера n , $x_i \in V$. Поэтому для всех $i > n$ будем иметь: $F(x_i) \cap U \neq \emptyset$. Пришли к противоречию. Значит $z \notin \underline{F}_G(x)$, т.е. $z \in C[\underline{F}_G(x)]$.

б). По теореме 2 и закону Моргана имеем:

$$C[\overline{F}_G(x)] = C\left[\bigcup_{A \in \mathfrak{R}} \underline{F}_A(x)\right] = \bigcap_{A \in \mathfrak{R}} C[\underline{F}_A(x)].$$

Поэтому $z \in C[\overline{F}_G(x)]$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $A \in \mathfrak{R}$ справедливо: $z \in C[\underline{F}_A(x)]$. Применяя результаты пункта а), получим требуемый критерий.

3°. Пределы в пространствах с первой и второй аксиомами счетности.

Лемма 2. Пусть пространство Y удовлетворяет первой аксиоме счетности.

а). Точка $z \in \overline{F}_G(x)$ тогда и только тогда, когда существуют последовательности точек $(x_i \in G - \{x\})$, сходящаяся к x в X , и $(z_i \in F(x_i))$, сходящаяся к z в Y .

б). Точка $z \in \underline{F}_G(x)$ тогда и только тогда, когда из любой последовательности $(x_i \in G - \{x\})$, сходящейся к x , можно извлечь подпоследовательность (y_i) , для которой найдется последовательность $(z_i \in F(y_i))$, сходящаяся к z в Y .

Доказательство.

а). Пусть $z \in \overline{F}_G(x)$. По теореме 2 существует последовательность $B = (x_i \in G - \{x\})$, сходящаяся к x , такая, что $z \in \underline{F}_B(x)$. Зададим счетную систему окрестностей $(U_i \in \tau(z))$ точки z такую, что $U_1 \supset U_2 \supset \dots$. Такая система окрестностей существует, поскольку пространство Y удовлетворяет первой аксиоме счетности (предл. 2(а)). Для каждой окрестности U_i найдется окрестность $V_i \in \sigma_G(x)$ такая, что для всех $y \in V_i \cap B$ справедливо: $F(y) \cap U_i \neq \emptyset$. Пусть y_i - произвольный элемент последовательности B , попадающий в V_i , а z_i - произвольная точка из $F(y_i) \cap U_i$, $i = 1, 2, \dots$. Тогда последовательность $(y_i \in G - \{x\})$ сходится к x , как подпоследовательность сходящейся к x последовательности B , а последовательность $(z_i \in F(y_i))$ сходится к z ввиду предл. 2(б).

Пусть, наоборот, существует пара последовательностей: $B = (y_i \in G - \{x\})$, сходящаяся к x , и $(z_i \in F(y_i))$, сходящаяся к z . Допустим, что $z \notin \overline{F}_G(x)$. Согласно лемме 1(б) найдется окрестность $U \in \tau(z)$ и подпоследовательность $(x_i \in B)$ последовательности B такие, что $F(x_i) \cap U = \emptyset$ для всех $i = 1, 2, \dots$. Пусть (w_i) - соответствующая подпоследовательность последовательности (z_i) : $w_i \in F(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$. Из сходимости $(z_i) \rightarrow z$ следует, что и $(w_i) \rightarrow z$. Поэтому, начиная с некоторого номера n , $w_i \in U$, откуда имеем: $F(x_i) \cap U \neq \emptyset$ при всех $i \geq n$. Получили противоречие. Допущение было неверным. Значит $z \in \overline{F}_G(x)$.

б). По теореме 2 справедливо:

$$\underline{F}_G(x) = \bigcap_{A \in \mathfrak{R}} \overline{F}_A(x).$$

Поэтому $z \in \underline{F}_G(x)$ тогда и только тогда, когда $z \in \overline{F}_A(x)$ для всех $A \in \mathfrak{R}$. Применяя результаты пункта а), получим требуемый критерий.

Теорема 3.

$$1. \overline{F}_G(x) = cl [\overline{F}_G(x)]. \quad (8)$$

$$2. \overline{F}_G(x) = \bigcap_{V \in \sigma_G(x)} cl \left[\bigcup_{y \in V} F(y) \right]. \quad (9)$$

$$3. \underline{F}_G(x) - \overline{K}_G(x) \subset \underline{(F - K)}_G(x). \quad (10)$$

Доказательство.

1. Пусть $z \in cl [\overline{F}_G(x)]$. Зададим счетную локальную базу окрестностей $(U_i \in \tau(z))$ точки z такую, что $U_1 \supset U_2 \supset \dots$, и счетную локальную базу окрестностей $V_i \in \sigma_G(x)$ точки x такую, что $V_1 \supset V_2 \supset \dots$. Для каждого номера $i = 1, 2, \dots$ найдется точка $z_i \in \overline{F}_G(x) \cap U_i$. Согласно лемме 2(а) для каждого номера i можно указать две последовательности: $(x_{(i)k} \in G - \{x\})_{k=1}^\infty$, сходящуюся к x , и $(z_{(i)k} \in F(x_{(i)k}))_{k=1}^\infty$, сходящуюся к z_i . Так как $(z_{(i)k})_{k=1}^\infty \rightarrow z_i$, то найдется номер $l_{(i)}$ такой, что при всех $j > l_{(i)}$ выполняется: $z_{(i)j} \in U_i$. А из сходимости $(x_{(i)k})_{k=1}^\infty \rightarrow x$ следует, что найдется номер $m_{(i)}$ такой, что при всех $j > m_{(i)}$ имеет место: $x_{(i)j} \in V_i$. Пусть $y_i = x_{(i)j}$, а $w_i = z_{(i)j}$, где j - произвольный номер, удовлетворяющий условию: $j > \max [l_{(i)}, m_{(i)}]$. Тогда имеем две последовательности: $(y_i \in V_i)$, сходящуюся к x , и $(w_i \in F(y_i) \cap U_i)$, сходящуюся к z . По лемме 2(а) $z \in \overline{F}_G(x)$. Доказали включение: $cl [\overline{F}_G(x)] \subset \overline{F}_G(x)$. Из него вытекает равенство (8).

2. Ввиду предл. 1(5) достаточно доказать включение

$$\bigcap_{V \in \sigma_G(x)} cl \left[\bigcup_{y \in V} F(y) \right] \subset \overline{F}_G(x).$$

Пусть

$$z \in \bigcap_{V \in \sigma_G(x)} cl \left[\bigcup_{y \in V} F(y) \right].$$

Зададим локальную базу окрестностей $V_i \in \sigma_G(x)$ точки x такую, что $V_1 \supset V_2 \supset \dots$. Тогда $z \in cl \left[\bigcup_{y \in V_i} F(y) \right]$ для всех номеров $i = 1, 2, \dots$. Зададим локальную базу окрестностей $U_i \in \tau(z)$ точки z такую, что $U_1 \supset U_2 \supset \dots$. Для каждой окрестности U_i справедливо

$$U_i \cap \left[\bigcup_{y \in V_i} F(y) \right] \neq \emptyset,$$

т.е. найдется точка $z_i \in U_i \cap F(x_i)$ для некоторой точки $x_i \in V_i$. В силу выбора локальных баз в

точках x и z согласно предл. 2(б) будет выполняться: $(x_i) \rightarrow x$, $(z_i) \rightarrow z$. На основании леммы 2(а) заключаем: $z \in \overline{F}_G(x)$. Требуемое включение, а, следовательно, и формула (9) доказаны.

3. Пусть $z \in \underline{F}_G(x) - \overline{K}_G(x)$. Возьмем произвольную последовательность $(x_i \in G - \{x\})$, сходящуюся к x . Так как $z \in \underline{F}_G(x)$, то по лемме 2(б) из последовательности (x_i) можно извлечь подпоследовательность (y_i) , для которой найдется сходящаяся к z последовательность $(z_i \in F(y_i))$. Так как $z \in C[\overline{K}_G(x)]$, то по лемме 1(б) найдутся окрестность $U \in \tau(z)$ точки z и подпоследовательность (a_i) последовательности (y_i) такие, что $K(a_i) \cap U = \emptyset$ для всех $i = 1, 2, \dots$. Пусть (w_i) - соответствующая последовательности (a_i) подпоследовательность последовательности (z_i) , т.е. $w_i \in F(a_i)$, $i = 1, 2, \dots$. Поскольку $(z_i) \rightarrow z$, то и $(w_i) \rightarrow z$. Поэтому найдется номер n такой, что при всех $i > n$ справедливо: $w_i \in U$ и, значит, $w_i \notin K(a_i)$, т.е. $w_i \in F(a_i) - K(a_i)$ или $w_i \in (F - K)(a_i)$. Без ограничения общности можно считать, что $w_i \in (F - K)(a_i)$ для всех $i = 1, 2, \dots$, иначе перейдем к рассмотрению подпоследовательности, получающейся из (a_i) отбрасыванием первых n членов. Таким образом, из произвольной последовательности $(x_i \in G - \{x\})$, сходящейся к x , нам удалось выбрать подпоследовательность (a_i) , для которой последовательность $(w_i \in (F - K)(a_i))$ сходится к z . Применяя опять лемму 2(б), заключаем, что

$$z \in \underline{F - K}_G(x).$$

Требуемое включение доказано.

Теорема 4. Пусть топологические пространства X и Y удовлетворяют первой аксиоме счетности, а пространство X к тому же является T_1 -пространством. Тогда для любой точки $x \in (G^d)^d$ справедливо:

$$\overline{(\overline{F}_G)_{G^d}}(x) \subset \overline{F}_G(x). \quad (11)$$

Доказательство.

Прежде всего обратим внимание, что, поскольку X является T_1 -пространством, то $(G^d)^d \subset G^d$ ([2], теорема 1.3(3)). Поэтому, если $x \in (G^d)^d$, то $x \in G^d$. Следовательно, оба множества в формуле (11) имеют смысл. Пусть $z \in \overline{(\overline{F}_G)_{G^d}}(x)$. По лемме 2(а) существуют две последовательности: $(x_i \in G^d - \{x\})$, сходящаяся к x , и $(z_i \in \overline{F}_G(x_i))$, сходящаяся к z . Опять же, по лемме 2(а) для каждого i существует пара последовательностей $(x_{(i)j} \in G - \{x_i\})_{j=1}^\infty$,

сходящаяся к x_i , и $(z_{(i)j} \in F(x_{(i)j}))_{j=1}^\infty$, сходящаяся к z_i . Пусть $(U_k \in \tau(z))$ — счетная локальная база окрестностей в точке z такая, что: $U_1 \supset U_2 \supset \dots$, $(V_k \in \sigma_G(x))$ — счетная локальная база проколотых окрестностей в точке x такая, что: $V_1 \supset V_2 \supset \dots$. Поскольку $(x_i) \rightarrow x$, а $(z_i) \rightarrow z$, то для каждого $k = 1, 2, \dots$ найдется такой номер i_k , что $x_{i_k} \in V_k$ и $z_{i_k} \in U_k$. Тогда $U_k \in \tau(z_{i_k})$, $V_k \in \sigma_G(x_{i_k})$. (Обратим внимание, что V_k , будучи проколотой окрестностью точки x , для точки x_{i_k} является обычной окрестностью. Тот факт, что V_k - открытое множество в X , обусловлен тем, что пространство X удовлетворяет первой аксиоме отделимости, а потому всякое одноточечное множество замкнуто в нем, а, следовательно, проколотая окрестность, получающаяся из открытого множества удалением одной точки, является открытым множеством.) Так как $(x_{(i_k)j}) \rightarrow x_{i_k}$ и $(z_{(i_k)j}) \rightarrow z_{i_k}$ при $j \rightarrow \infty$, то найдется такой номер l_k , что $x_{(i_k)l_k} \in V_k$, $z_{(i_k)l_k} \in U_k$. Обозначим: $y_k = x_{(i_k)l_k}$, $w_k = z_{(i_k)l_k}$. Тогда имеем две последовательности: $(y_k \in V_k)$ и $(w_k \in U_k)$, сходящиеся к x и z соответственно. Остается заметить, что $y_k \in G - \{x\}$ и $w_k \in F(y_k)$ при всех $k = 1, 2, \dots$. На основании леммы 2(а) заключаем, что $z \in \overline{F}_G(x)$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 4. Если в каждой точке $x \in G^d$ существует предел м.о. $F : X \rightarrow Y$, то

$$\overline{(lt_G F)_{G^d}}(x) \subset lt_G F(x).$$

Доказательство следующего утверждения опирается на обобщенную теорему Больцано-Вейерштрасса ([1], с. 348): любая последовательность подмножеств пространства, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, содержит сходящуюся подпоследовательность (предел которой может быть пустым множеством).

Теорема 5. Если пространство Y удовлетворяет второй аксиоме счетности, то

$$\underline{F}_G(x) = \bigcap_{A \in \mathfrak{R}'} lt_A F(x),$$

$$\overline{F}_G(x) = \bigcup_{A \in \mathfrak{R}'} lt_A F(x),$$

где \mathfrak{R}' - множество сходящихся к x последовательностей $A = (x_i \in G - \{x\})$, для которых существует предел $lt_A F(x)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2, где вместо множества \mathfrak{R} надо рассмотреть множество \mathfrak{R}' , вместо $\mathfrak{R}_G(x)$ — множество \mathfrak{R} всевозможных сходящихся к x последовательностей $A = (x_i \in G - \{x\})$, в качестве

$\tilde{\mathfrak{R}}$ принять множество всех последовательностей $A = (x_i \in A - \{x\})$, однозначно сопоставляемых (в силу обобщенной теоремы Больцано- Вейер- штрасса) всевозможным сходящимся к x последовательностям $A \in \mathfrak{R}$, для которых существуют пределы $lt_{\tilde{\mathfrak{A}}} F(x)$; воспользоваться теоремой 2.

Библиографический список

1. Куратовский К. Топология. М.: Мир, 1966.Т.1. отображений // Вестник БГПУ: Естественные и точные науки. 2004. №4.
2. Поликанова И.В. Пределы многозначных
3. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию.М.: Наука, 1977.

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

Центральной проблемой в комбинаторной теории многогранников является проблема перечисления и классификации многогранников с заданной структурой его граней. Леонард Эйлер решил ряд задач перечисления для некоторых типов триангулированных многогранников, расположенных на плоскости, но всё же существенные шаги в теории перечисления многогранников еще не сделаны. Из-за их многочисленных приложений основные усилия направле-

ны на перечисление 3 - мерных многогранников с данным числом вершин. Перечислением 3 - мерных многогранников занимались Штейнер, Киркман, Брюкнер и др. Благодаря теореме Штейница эта задача эквивалентна задаче перечисления трехсвязных планарных графов. Однако и в этом случае проблема полностью не решена. Для произвольного d в настоящее время перечислены только d - мерные многогранники с числом вершин не превосходящим $d + 3$. [1]

Таблица 1

Числа комбинаторно различных многогранников с данными числами вершин и граней.

Вершины	5	6	7	8	9	10	11	12	
Грани									
4	1								
5		1	1						
6		1	2	2					
7			2	8	11	8	5		
8			2	11	42	74	76	38	
9				8	74	296	633	768	
10				5	76	633	2635	6134	
11					38	768	6134	25626	
12					14	558	8822	64439	
13						219	7916	104213	
14						50	4442	112082	
15							1404	79773	
16							233	36528	
17								9714	
18								1249	
19								69564*	
20								7595	
Итого:	1	2	7	34	257	2606	32300	440564	6363115*

*приближенные числа.

После появления ЭВМ были разработаны и опробованы различные переборные алгоритмы для перечисления многогранников с данным числом вершин и граней. Но из-за больших затрат времени на вычисление - точные результаты были установлены только для относительно небольшого числа вершин и граней. Последние из известных результатов представлены в таблице 1.

Представляет большой интерес найти значительно более эффективный алгоритм перечисления многогранников, чтобы, используя его про-

верить данные, полученные при помощи других алгоритмов и расширить таблицу. Также представляет интерес найти вычислительную сложность проблемы, то есть оценить наименьшее число шагов, требуемых для перебора многогранников при большом числе вершин. Линиал недавно показал, что такие проблемы NP полны. Кроме методов прямого перечисления многогранников, существуют асимптотические формулы, дающие приближенное число многогранников.

Рассмотрим основные определения и теоре-

мы теории выпуклых многогранников и необходимые факты из теории графов. Одной из важнейших теорем общей теории выпуклых многогранников, рассматриваемых как поверхности, является теорема Эйлера (1758): число вершин минус число рёбер плюс число граней выпуклого многоугольника равно двум, то есть $p - q + r = 2$.

Графом G многогранника называют пару (V, E) , состоящую из множества вершин и множества ребер многогранника. Граф d - многогранника называется d - полиэдральным.

Графы многогранников обладают многими интересными свойствами; при их изучении возникает большое число задач, представляющих интерес не только для теории графов, комбинаторики, топологии и геометрии, но и для теории линейного программирования.

Граф d - связан тогда и только тогда, когда подграф, полученный из данного графа удалением любых $d - 1$ вершин, связан. Граф d - многогранника d - связан. Граф называется планарным, если его можно уложить на плоскости так, чтобы никакие два его ребра не пересекались.

Теорема Штейница: граф является 3 - полиэдральным тогда и только тогда, когда он планарен и трехсвязен. Значение теоремы Штейница заключается в том, что она позволяет изучение 3 -многогранников заменять исследованием трехсвязных планарных графов. [1]

Максимальным планарным графом называется граф, который при добавлении любого ребра перестает быть планарным. Уитни доказал, что каждый максимальный планарный граф, имеющий более четырёх вершин, трехсвязен. Из этого следует, что каждый максимальный планарный граф, содержащий, по крайней мере, четыре вершины, является 3 - полиэдральным. Из

теоремы Эйлера и определения планарного графа следует, что для связного планарного (V, E) - графа $q \leq 3 \cdot p - 6$ при $p \geq 3$, равенство выполняется в случае максимального плоского графа.

Рассмотрим другой вариант теоремы Штейница (1917): существует выпуклый многогранник с любой наперёд заданной сеткой. При этом сеткой выпуклого многогранника называют сетку, составленную его рёбрами (примечание: сетка многогранника - это и есть граф многогранника). Два многогранника принадлежат одному и тому же типу, если типологически тождественны сетки их рёбер, то есть если один из них отличается от другого лишь длиной своих рёбер и величиной углов между ними. Сетку рёбер выпуклого многогранника можно спроектировать на плоскость из внешней точки, весьма близкой к внутренней точке какой-нибудь его грани. Сама эта грань проектируется тогда в виде внешнего выпуклого многоугольника, а все остальные - в виде малых выпуклых многоугольников, которые его заполняют, не налегая друг на друга, и смежны друг с другом целыми сторонами. Тип сетки рёбер многогранника при таком проектировании не меняется. Число m типов многогранников с данным числом n граней ограничено, а именно: если $n = 4, 5, 6, 7, 8, \dots$, то $m = 1, 2, 7, 34, 257, \dots$ (см. нижнюю строчку в таблице 1) [2]

Если использовать понятия теории графов, то можно сказать что два многогранника принадлежат к одному типу, тогда и только тогда, когда их графы изоморфны. На рисунке 1 представлены два многогранника с 6 вершинами, 12 рёбрами, и 8 гранями, которые не комбинаторно эквивалентны, то есть принадлежат разным типам.

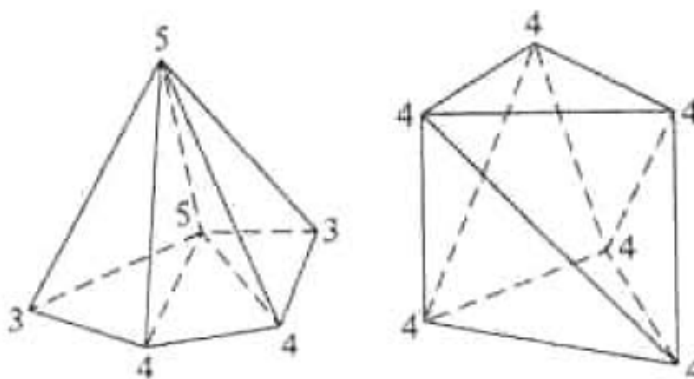


Рисунок 1

Каждому многограннику можно однозначно поставить в соответствие точку с координатой (p, q, r) в пространстве или точку с координатой (p, q) на плоскости. При таком соответствии все образы многогранников будут лежать на одной

плоскости (см. рисунок 2) заданной уравнением $p - q + r - 2 = 0$. Кроме того, образы многогранников находятся в части плоскости заключенной между двумя прямыми (см. рисунок 3).

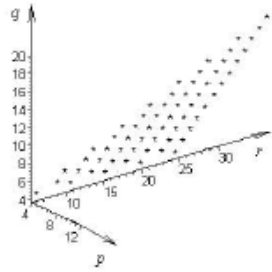


Рисунок 2

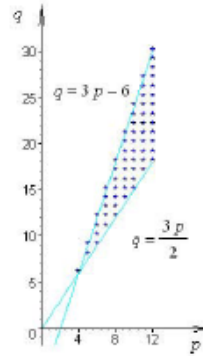


Рисунок 3

Теорема Штейница позволяет изучение 3 - многогранников заменить исследованием трёхсвязных планарных графов. Поэтому для перечисления всех типов многогранников с данным числом вершин, достаточно найти все неизоморфные, трёхсвязные, планарные графы с этим числом вершин. Пользуясь этими правилами, был составлен алгоритм нахождения всех графов задающих многогранники с данным числом вершин. Алгоритм реализован в системе компьютерной математики Maple, для графов с 4, 5, 6, 7, 8 - вершинами. Проведённые расчёты полностью совпали с известными данными. Суть алгоритма заключается в следующем, организуется полный перебор матриц смежности (или Кирхгофа) заданного порядка, среди них выбираются те, которые задают трёхсвязные и планарные графы. Трёхсвязность графа проверяется по определению, а планарность - проверяется с встроенной функцией `isplanar` пакета Maple. При таком подходе наиболее сложной задачей является задача отбора неизоморфных графов удовлетворяющих условиям трёхсвязности и планарности. Изоморфность графов проверяется на основе выдвинутой гипотезы: два плоских, трёхсвязных графа являются изоморфными, тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые степенные последовательности и одинаковое количество остовных деревьев. Как известно, алгебраические дополнения всех элементов матрицы Кирхгофа равны между собой и равны количеству остовных деревьев графа (матричная теорема Кирхгофа). Поэтому для подсчёта количества остовных деревьев графа

достаточно найти, например, алгебраическое дополнение элемента стоящего в первой строке и первом столбце. Ниже приведены степенные последовательности и количество остовных деревьев для неизоморфных графов многогранников с 4, 5, 6, 7 - вершинами. Степенная последовательность представляет собой список в котором элемент в i - позиции равен количеству вершин графа степени i .

- 1) $[0, 0, 4]$ 16
- 1) $[0, 0, 2, 3]$ 75
- 2) $[0, 0, 4, 1]$ 45
- 1) $[0, 0, 2, 2, 2]$ 336
- 2) $[0, 0, 3, 2, 1]$ 209
- 3) $[0, 0, 5, 0, 1]$ 121
- 4) $[0, 0, 0, 6, 0]$ 384
- 5) $[0, 0, 2, 4, 0]$ 224
- 6) $[0, 0, 4, 2, 0]$ 130
- 7) $[0, 0, 6, 0, 0]$ 75
- 1) $[0, 0, 2, 3, 0, 2]$ 1463
- 2) $[0, 0, 3, 0, 3, 1]$ 1445
- 3) $[0, 0, 2, 2, 2, 1]$ 1488
- 4) $[0, 0, 3, 2, 1, 1]$ 928
- 5) $[0, 0, 3, 2, 1, 1]$ 935
- 6) $[0, 0, 2, 4, 0, 1]$ 960
- 7) $[0, 0, 4, 2, 0, 1]$ 560
- 8) $[0, 0, 4, 2, 0, 1]$ 576
- 9) $[0, 0, 6, 0, 0, 1]$ 320
- 10) $[0, 0, 3, 1, 3, 0]$ 943
- 11) $[0, 0, 1, 3, 3, 0]$ 1682
- 12) $[0, 0, 3, 1, 3, 0]$ 986

13)	[0, 0, 2, 3, 2, 0]	1015
14)	[0, 0, 4, 2, 1, 0]	593
15)	[0, 0, 4, 2, 1, 0]	585
16)	[0, 0, 3, 3, 1, 0]	608
17)	[0, 0, 0, 5, 2, 0]	1805
18)	[0, 0, 1, 5, 1, 0]	1102
19)	[0, 0, 3, 3, 1, 0]	615
20)	[0, 0, 2, 3, 2, 0]	1045
21)	[0, 0, 3, 3, 1, 0]	644
22)	[0, 0, 3, 3, 1, 0]	633
23)	[0, 0, 5, 1, 1, 0]	368
24)	[0, 0, 3, 3, 1, 0]	638
25)	[0, 0, 5, 1, 1, 0]	353
26)	[0, 0, 4, 3, 0, 0]	361
27)	[0, 0, 2, 5, 0, 0]	672
28)	[0, 0, 4, 3, 0, 0]	392
29)	[0, 0, 2, 5, 0, 0]	663
30)	[0, 0, 4, 3, 0, 0]	368
31)	[0, 0, 4, 3, 0, 0]	386

32) [0, 0, 4, 3, 0, 0] 377

33) [0, 0, 6, 1, 0, 0] 209

34) [0, 0, 6, 1, 0, 0] 224

Дальнейшее использование пакета Maple для перечисления трёхсвязных, планарных графов с более чем восьмью вершинами не целесообразно из-за больших затрат времени на работу программы, так как пакет Maple все вычисления проводит в символьном виде. Поэтому для решения задачи перебора необходимо написать программу, реализующую алгоритм перебора на каком-нибудь языке программирования, например Turbo Pascal, поскольку при этом вычисления будут происходить гораздо быстрее. При этом время работы программы напрямую будет зависеть от сложности алгоритмов определения планарности и изоморфности перебираемых графов.

Библиографический список

1. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников). М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 344 с.
2. Математика: Энциклопедия / Под ред. Ю.В. Прохорова. М.: большая Российская энциклопедия, 2003. 845 с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

1

1. Введение

Данная работа является продолжением работ [1], [2], и в ней исследуются дифференциальные операторы градиента и Лапласа на группе Гейзенберга с левоинвариантной лоренцевой метрикой.

2. Левоинвариантные метрики на группах Ли

В последующих частях мы будем придерживаться традиционных обозначений, выбранных для групп и алгебр Ли.

Пусть G – группа Ли, $\{g, [\cdot, \cdot]\}$ – соответствующая алгебра Ли. Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – левоинвариантную (псевдо)риманову метрику на G . Тогда (псевдо)риманова связность определяется равенством

$$2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle = X \langle Y, Z \rangle + Y \langle X, Z \rangle - Z \langle X, Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle.$$

Для левоинвариантных векторных полей X, Y, Z первые три слагаемых равны нулю, поэтому

$$2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle.$$

В силу того, что ∇ – связность Леви-Чивита, имеем

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

Пусть $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ – левоинвариантные векторные поля на группе Ли. Положим

$$[E_i, E_j] = C_{ij}^k E_k, \quad \langle E_i, E_j \rangle = g_{ij},$$

где $\{C_{ij}^k\}$ – структурные константы алгебры Ли, $\{g_{ij}\}$ – метрический тензор.

Пусть $C_{ijs} = C_{ij}^k g_{ks}$, тогда символы Кристоффеля второго рода вычисляются по формулам

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} (C_{ijk} - C_{jki} + C_{kij}).$$

Соответственно, символы Кристоффеля первого рода имеют вид

$$\Gamma_{ij}^s = \Gamma_{ij,k} g^{ks},$$

где $\|g^{ks}\|$ – матрица обратная к $\|g_{ij}\|$. Тензор Римана в данном случае можно найти по формуле

$$R_{ijkl} = C_{ij}^s \Gamma_{sk,t} - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is,t} + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js,t},$$

а тензор Риччи и скалярная кривизна соответственно вычисляются по формулам:

$$R_{ik} = R_{ijkl} g^{jk}, \quad R = R_{ik} g^{ik}.$$

3. Анализ на группе Гейзенберга с левоинвариантной лоренцевой метрикой

Пусть $G = G_5$ – группа Гейзенберга треугольных матриц вида

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 1 & 0 & 0 \\ a_{3,1} & 0 & 1 & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & 1 \end{bmatrix} : a_{i,j} \in R \right\}. \quad (1)$$

Алгебра Ли g группы G есть матричная алгебра Ли вида

$$g = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ t^4 & 0 & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 0 & 0 \\ t^1 & t^3 & t^5 & 0 \end{bmatrix} : t^i \in R \right\}.$$

Выберем базис g следующим образом:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нижний центральный ряд алгебры g состоит из идеалов $g_1 \subset g_0 = g$, где $g_1 = [g, g] = \{E_1\}$ –

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по ведущим научным школам РФ (НШ 311.2003.1).

коммутатор, алгебра g - одноступенчатая нильпотентная, центр алгебры g порождается вектором E_1 .

Пусть на алгебре g задана лоренцева метрика, т.е. скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ сигнатуры 1. Множество времениподобных векторов, направленных в будущее, образует открытый выпуклый конус $C^+ \subset g$.

Определение 1. Будем говорить, что левинвариантная лоренцева метрика на нильпотентной группе G_5 принадлежит классу C^+ , если центр соответствующей алгебры Ли строго лежит в изотропном конусе метрики.

Теорема 1. Пусть на группе G_5 задана левинвариантная лоренцева метрика класса C^+ , тогда в алгебре Ли g существует ортонормированный базис $\{V'_1, V'_2, V'_3, V'_4, V'_5\}$ такой, что

$$\begin{aligned} \langle V'_1, V'_1 \rangle &= -1, \langle V'_2, V'_2 \rangle = \langle V'_3, V'_3 \rangle = \dots = 1, \\ \langle V'_i, V'_j \rangle &= 0, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

причем

$$\{V'_1, \dots, V'_i\} = \{E_1, \dots, E_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, 5.$$

Доказательство. Построим искомый базис путем ортогонализации Грамма-Шмидта системы векторов $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$ относительно скалярного произведения, соответствующего лоренцевой метрике. По индукции строится $\{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5\}$ - ортогональная система векторов такая, что

$$\begin{aligned} U_1 &= E_1, \\ U_2 &= E_2 + x_{2,1}U_1, \\ \dots &= \dots \\ U_5 &= E_5 + x_{5,1}U_1 + x_{5,2}U_2 + x_{5,3}U_3 + x_{5,4}U_4. \end{aligned}$$

Алгоритм пройдет, если на каждом шаге вектор U_i не будет изотропным. Верны равенства:

$$\begin{aligned} \langle U_1, U_1 \rangle &= \langle E_1, E_1 \rangle, \\ \langle U_2, U_2 \rangle &= \frac{\langle E_1 \wedge E_2, E_1 \wedge E_2 \rangle}{\langle E_1, E_1 \rangle}, \\ \langle U_3, U_3 \rangle &= \frac{\langle E_1 \wedge E_2 \wedge E_3, E_1 \wedge E_2 \wedge E_3 \rangle}{\langle E_1 \wedge E_2, E_1 \wedge E_2 \rangle}, \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

$$Ric = \frac{5}{4} \begin{bmatrix} \mu'_1{}^2 + \mu'_3{}^2 + \mu'_4{}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\mu'_1{}^2 & 3\mu'_1\mu'_3 & 3\mu'_1\mu'_4 & 0 \\ 0 & 3\mu'_1\mu'_3 & 3\mu'_3{}^2 & 3\mu'_3\mu'_4 & 0 \\ 0 & 3\mu'_1\mu'_4 & 3\mu'_3\mu'_4 & 3\mu'_4{}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

где $\langle E_1 \wedge \dots \wedge E_i, E_1 \wedge \dots \wedge E_i \rangle$ - определитель Грамма системы векторов $\{E_1, \dots, E_i\}$. Плоскость, натянутая на векторы $\{E_1, \dots, E_i\}$, имеет размерность i и трансверсально пересекает конус C^+ (не касается его), поэтому для любого $i > 1$ верно неравенство $\langle E_1 \wedge \dots \wedge E_i, E_1 \wedge \dots \wedge E_i \rangle < 0$. Действительно, равенство нулю этого определителя означало бы, что сужение скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на плоскость $\{E_1, \dots, E_i\}$ вырождено, т.е. существовал бы вектор $u \in \{E_1, \dots, E_i\}$ такой, что

$$\langle u, w \rangle = 0, \quad \forall w \in \{E_1, \dots, E_i\},$$

следовательно, $\langle u, u \rangle = 0$, а $\{E_1, \dots, E_i\}$ содержалось бы в касательной плоскости к изотропному конусу в точке u - противоречие. \square

Из данной теоремы прямыми вычислениями получается

Теорема 2. Пусть $\{V'_1, V'_2, V'_3, V'_4, V'_5\}$ - ортонормированный базис, построенный согласно предыдущей теореме. Тогда справедливы равенства:

$$\begin{aligned} [V'_1, V'_i] &= 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, 5\}, \\ [V'_2, V'_5] &= \mu'_1 V'_1, \quad [V'_2, V'_i] = 0, \quad \forall i \in \{3, 4\}, \\ [V'_3, V'_4] &= \mu'_2 V'_1, \quad [V'_3, V'_5] = \mu'_3 V'_1, \\ [V'_4, V'_5] &= \mu'_4 V'_1, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mu_i \in R, i = 1, \dots, 4$, структурные константы алгебры Ли. Обратно, если дано векторное пространство размерности 5 и для базисных векторов определена скобка Ли с помощью указанных формул, то при условии $\mu'_1 \neq 0, \mu'_2 \neq 0$, эта алгебра изоморфна алгебре Ли группы G_5 .

Замечание 1. При любом выборе констант $\mu'_i, i = 1, \dots, 4$ формулы (2) определяют 5-мерную алгебру Ли. Алгебры Ли, заданные формулами (2), без требования $\mu'_1 \neq 0, \mu'_2 \neq 0$, будем называть алгебрами Ли групп Ли типа G_5

Применяя формулы Милнора [3] для вычисления тензора Риччи в построенном базисе, получим (4):

Матрица Ric имеет три собственных числа $\left\{\frac{5l^2}{4}, \frac{15l^2}{4}, 0\right\}$, $l^2 = \mu_1'^2 + \mu_3'^2 + \mu_4'^2$, кратности соответственно $\{1, 1, 3\}$. С помощью ортогональной матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu_1'}{l} & \frac{\mu_3'}{l} & \frac{\mu_4'}{l} & 0 \\ 0 & \frac{-\mu_3'}{l_1} & 0 & \frac{\mu_1'}{l_1} & 0 \\ 0 & \frac{\mu_1'\mu_3'}{ll_1} & \frac{-l_1}{l} & \frac{\mu_4'\mu_3'}{ll_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

где $l_1^2 = \mu_1'^2 + \mu_4'^2$, получим ортонормированный базис $\{V_1, V_2, \dots, V_5\}$ для которого структурные уравнения примут вид

$$\begin{aligned} [V_1, V_i] &= 0, \forall i \in \{1, \dots, 5\}, \\ [V_2, V_3] &= \mu_1 V_1, [V_2, V_4] = \mu_2 V_1, [V_2, V_5] = \mu_3 V_1, \\ [V_3, V_4] &= \mu_4 V_1, [V_3, V_5] = 0, [V_4, V_5] = 0, \end{aligned}$$

где $\mu_1 = \frac{\mu_1'\mu_2'\mu_3'}{ll_1}$, $\mu_2 = \frac{\mu_2'\mu_4'}{l_1}$, $\mu_3 = l$, $\mu_4 = \frac{\mu_1'\mu_2'}{l}$ структурные константы алгебры Ли в этом базисе, а тензор кривизны Риччи имеет наиболее простой вид. Заметим, что в работе [4] указана классификация пятимерных нильпотентных метрических алгебр Ли (риманов случай), и часть алгебр из этой работы совпадает с алгебрами вышеуказанного типа.

Группа G_5 , как видно из (1), диффеоморфна R^5 . Другая возможная параметризация группы G_5 – это экспоненциальное отображение

$$r(t) = \text{Exp} \left(\sum_{i=1}^5 t^i V_i \right). \quad (4)$$

Используя данную параметризацию, можно любую функцию $f : R^5 \rightarrow R$ рассматривать, как функцию заданную на группе G_5 . Хорошо известна формула для дифференциала экспоненциального отображения

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \text{Exp}(X + tY) \right|_{t=0} &= \\ &= d_e L_{\text{Exp}(X)} \left\{ \frac{I - e^{-\text{ad}_X}}{\text{ad}_X} (Y) \right\} = \\ &= d_e L_{\text{Exp}(X)} \left\{ Y - \frac{[X, Y]}{2!} + \frac{[X, [X, Y]]}{3!} - \dots \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

Положим для краткости $X = t^i V_i$, тогда, так как алгебра одноступенчатая, получим равенство

$$\frac{\partial r}{\partial t^k} = d_e L_{\text{Exp}(X)} \left\{ V_k - \frac{[X, V_k]}{2!} \right\} \quad (6)$$

Введем в рассмотрение векторные поля, заданные на касательном пространстве $g = T_e(G_5)$ в единичной точке $e \in G_5$ формулами;

$$\begin{aligned} U_k(t) &= V_k - \frac{[X, V_k]}{2!} = \\ &= V_k - \frac{t^i [V_i, V_k]}{2!} = \\ &= F_k^s(t) V_s, \end{aligned} \quad (7)$$

где $k = 1, \dots, 5$, матрица $\|F_k^s(t)\|$ – нижняя треугольная, на диагонали стоят 1, ниже полиномы от t^i степени не выше 1.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{t_3 \mu_1 + t_4 \mu_2 + t_5 \mu_3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_2 \mu_1 - t_4 \mu_4}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{t_2 \mu_2 + t_3 \mu_4}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{t_2 \mu_3}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Аналогичный вид имеет обратная матрица $\|G_s^k(t)\| = \|F_k^s(t)\|^{-1}$. Отсюда получаем, что левоинвариантные векторные поля $\tilde{V}_s = d_e L_{\text{Exp}(X)} V_s$ и голономные векторные поля $\frac{\partial}{\partial t^k} = d_e L_{\text{Exp}(X)} U_s$ на многообразии G в точке t связаны между собой равенствами

$$\frac{\partial}{\partial t^k} = F_k^s(t) \tilde{V}_s, \quad \tilde{V}_s = G_s^k(t) \frac{\partial}{\partial t^k}, \quad (9)$$

Для краткости частные производные функции $\sigma(t^1, \dots, t^5)$ будем обозначать как

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t^k} = \sigma_k, \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^r \partial t^k} = \sigma_{kr}.$$

Для ковариантных производных функции $\sigma(t^1, \dots, t^5)$ вдоль векторных полей \tilde{V}_s введем обозначения:

$$\begin{aligned} \nabla_{\tilde{V}_s}(\sigma) &= \tilde{V}_s(\sigma) = \nabla_s \sigma, \\ \nabla_{\tilde{V}_p} \nabla_s \sigma &= \tilde{V}_p(\nabla_s \sigma) - \Gamma_{sp}^r \nabla_r \sigma = \nabla_p \nabla_s \sigma. \end{aligned}$$

Данные производные связаны между собой равенствами:

$$\begin{aligned} \nabla_s \sigma &= \sigma_k G_s^k, \\ \nabla_p \nabla_s \sigma &= \sigma_{kl} G_s^k G_p^l + \sigma_k \left(G_p^l \frac{\partial G_s^k}{\partial t^l} - \Gamma_{sp}^r G_r^k \right) \end{aligned} \quad (10)$$

В частности, квадрат градиента и оператор Лапласа-Бельтрами функции σ относительно левоинвариантной метрики класса C^+ равны:

$$|\nabla \sigma|^2 = \sigma_k \sigma_p G_t^p G_s^k g^{ts},$$

$$\Delta\sigma = g^{sp} \left[\sigma_{kl} G_s^k G_p^l + \sigma_k \left(G_p^l \frac{\partial G_s^k}{\partial t^l} - \Gamma_{sp}^r G_r^k \right) \right],$$

где g^{ts} компоненты метрического тензора в базе \hat{V}_s . Заметим, что так как обе матрицы $\|G_p^l\|_{p,l}$, $\|\frac{\partial G_s^k}{\partial t^l}\|_{s,k}$ нижние треугольные и у второй матрицы на главной диагонали стоят нули, то

$$G_p^l \frac{\partial G_s^k}{\partial t^l} g^{sp} = 0.$$

Непосредственно проверяется, что $\Gamma_{sp}^r g^{sp} = 0$ при любом выборе структурных констант $\{\mu_i\}$. Следовательно уравнение Лапласа в данном случае примет вид

$$\Delta\sigma = \sigma_{kl} G_s^k G_p^l g^{sp} = f(t^1, \dots, t^5).$$

Замечание 2. Произвольный полином $\sigma(t^1, \dots, t^5)$ 1-ой степени является гармонической функцией на G .

Определение 2. Назовем функцию $\sigma(t^1, \dots, t^5)$, заданную в экспоненциальной системе координат $\{t^1, \dots, t^5\}$ инвариантной относительно оператора градиента, если при любом выборе левоинвариантной метрики класса C^+ на группе G_5 эта функция удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} |\nabla\sigma|^2 &= \sigma_k \sigma_l G_s^k G_p^l g^{sp} = \\ &= -\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + \sigma_5^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Определение 3. Назовем функцию $\sigma(t^1, \dots, t^5)$, заданную в экспоненциальной системе координат $\{t^1, \dots, t^5\}$ инвариантной относительно оператора Лапласа, если при любом выборе левоинвариантной метрики класса C^+ на группе G_5 эта функция удовлетворяет равенству

$$\Delta\sigma = \sigma_{kl} G_s^k G_p^l g^{sp} =$$

$$= -\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} + \sigma_{44} + \sigma_{55}. \quad (12)$$

В частности, любая линейная в экспоненциальной системе координат функция – инвариантная.

Теорема 3. Функция $\sigma(t^1, \dots, t^5)$ является инвариантной на группе Гейзенберга G_5 относительно нахождения градиента, если удовлетворяет системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma_5 t_2 - \sigma_2 t_5 &= 0, \\ \sigma_3 t_4 - \sigma_4 t_3 &= 0, \\ \sigma_5 t_3 - \sigma_3 t_5 &= 0, \\ \sigma_5 t_4 - \sigma_4 t_5 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Доказательство. Выражение $|\nabla\sigma|^2 = \sigma_k \sigma_l G_s^k G_p^l g^{sp}$ есть квадратичная функция структурных констант μ_i , поэтому, приравнявая коэффициенты к нулю, получим искомые уравнения. \square

Следствие. Произвольная функция вида $\sigma(t^1, (t^2)^2 + (t^3)^2 + (t^4)^2 + (t^5)^2)$ является инвариантной относительно нахождения градиента.

Замечание 3. Заметим, что по аналогии со случаем градиента, можно получить систему дифференциальных уравнений для функций, инвариантных на группе Гейзенберга G_5 относительно нахождения лапласиана.

Библиографический список

1. Е.Д. Родионов, В.В. Славский. Локально конформно однородные пространства // Доклады академии наук. 2002. 373(3).
2. E.D. Rodionov, V.V. Slavskii. Conformal deformations of the Riemannian metrics and homogeneous Riemannian spaces. Comm. Math. Univ. Carolinae. 2002. 43(2). 271-282.
3. J.Milnor. Curvature of left invariant metric on Lie groups. Advances in mathematics. 1976. 21. 293-329.
4. Е.В. Никитенко. Пятимерные нильпотентные метрические алгебры Ли. Вестник БГПУ. 2004. 4. 29-41.

ИНВАРИАНТНЫЕ РИМАНОВЫ МЕТРИКИ ЭЙНШТЕЙНА НА ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ УОЛЛАЧА

Рассмотрим G/H – однородное компактное пространство с полупростой группой движений G и связной подгруппой H . Через g и h обозначим алгебры Ли групп G и H соответственно. Пусть $B(\cdot, \cdot)$ – форма Киллинга алгебры g . Отметим, что $\langle \cdot, \cdot \rangle = -B(\cdot, \cdot)$ является бинвариантным скалярным произведением на g .

Рассмотрим p – ортогональное дополнение к h в g относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пространство G/H будем называть обобщенным пространством Уоллача если модуль p представим в виде прямой суммы трех попарно ортогональных, относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ad_h – инвариантных неприводимых модулей, т.е:

$$p = p_1 \oplus p_2 \oplus p_3, \quad (1)$$

удовлетворяющих соотношениям

$$[p_i, p_i] \subset h, \quad [p_i, p_j] \subset p_k,$$

где $\{i, j, k\}$ перестановка $\{1, 2, 3\}$.

Известно множество примеров пространств с описанным свойством. К ним относятся, например, многообразия флагов $SU(3)/T_{max}$, $Sp(3)/Sp(1) \times Sp(1) \times Sp(1)$, $F_4/Spin(8)$. Все пространства с данным свойством допускают инвариантные римановы метрики положительной секционной кривизны [2].

Пусть пространство G/H такое, что в разложении (1) все модули p_i попарно неизоморфны относительно присоединенного действия алгебры Ли h на p . В работе [1] показано, что все такие метрики параметризуются парой положительных чисел t и s , удовлетворяющих системе уравнений (2), где a_i – некоторые числа, удовлетворяющие соотношению

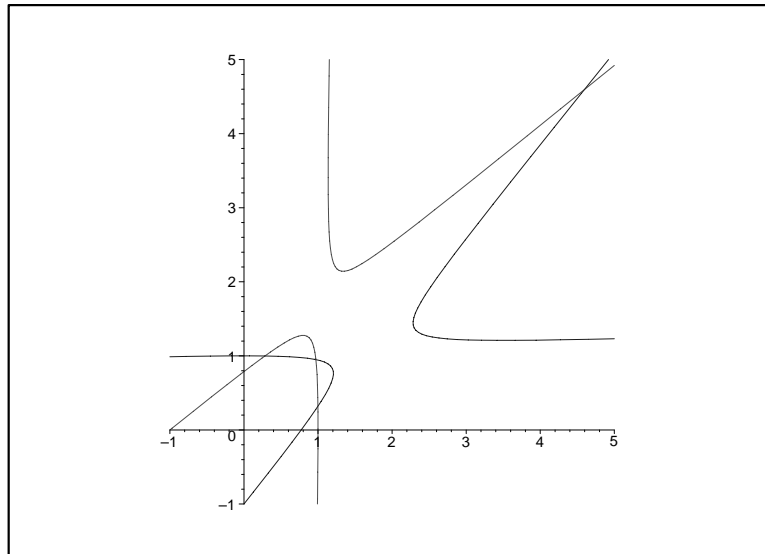
$$\frac{1}{2} \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 > 0.$$

Согласно работе [1], эта система всегда имеет, по крайней мере, одно решение.

$$\begin{cases} -(a_1 + a_2)t^2 + (a_2 - a_1)s^2 + ts - s + a_1 + a_2 = 0, \\ (a_3 - a_1)t^2 - (a_3 + a_1)s^2 + ts - t + a_1 + a_3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

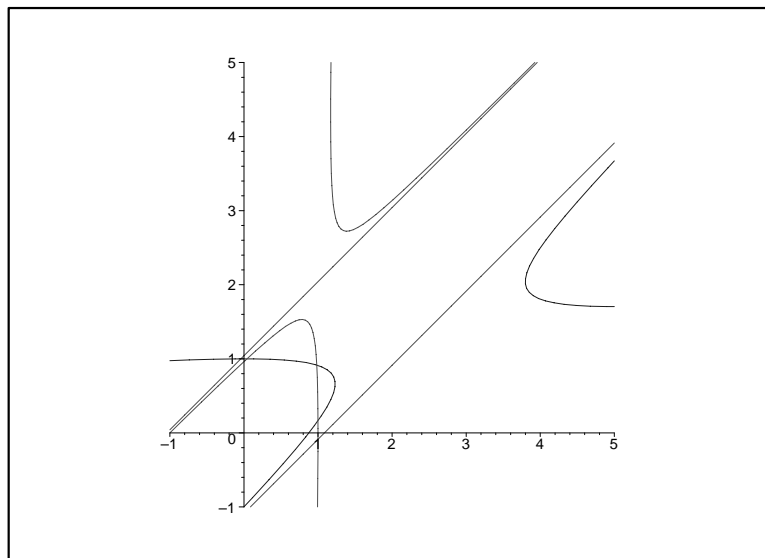
С геометрической точки зрения, уравнения в системе – это уравнения гипербол в прямоуголь-

ной декартовой системе координат Ots , которые могут иметь до четырех точек пересечения.



Рассмотрим два случая. Случай $a_1 = \frac{1}{2}$. В этом случае гиперболы в системе (2) имеют пару параллельных асимптот, следовательно, то-

чек пересечения не более трех. Следствием системы (2) будет уравнение третьей степени относительно переменной t , полученное с помощью математического пакета MAPLE:



$$(2(a_3 + a_2)^2)t^3 + (-2(a_3 + a_2)(2a_3a_2 + a_3 + 1))t^2 + (1/2(2a_3 + 1)(2a_3 + 1 - 4a_2^2 + 2a_2))t + (1/4(2a_2 - 1)(2a_2 + 1)(2a_3 + 1)^2) = 0.$$

Линейной заменой приведем это уравнение к каноническому виду. Получим:

$$A(a_2, a_3)t^3 + B(a_2, a_3)t + C(a_2, a_3) = 0.$$

Это уравнение имеет только положительные корни, и их количество определяет количество инвариантных метрик Эйнштейна на пространстве G/H . Известно, что количество корней кубического уравнения определяется знаком его дискриминанта

$$D = \frac{4B^3 + 27AC^2}{27A}.$$

Таким образом, при $D < 0$ пространство G/H имеет три инвариантные метрики, при $D = 0$ две, и при $D > 0$ одну.

Пример. Пространство ортогональной группы

$$SO(n_1 + n_2 + n_3) / SO(n_1) \times SO(n_2) \times SO(n_3).$$

В этом случае

$$a_1 = \frac{n_3}{2(n_1 + n_2 + n_3 - 2)},$$

$$a_2 = \frac{n_2}{2(n_1 + n_2 + n_3 - 2)},$$

$$a_3 = \frac{n_1}{2(n_1 + n_2 + n_3 - 2)}.$$

Пусть $n_1 = n_2 = 1, n_3 = n$.

Тогда, следствием системы (2) будет кубическое уравнение

$$216n^6t^3 + (90n^7 - 36n^6 - 18n^8 - 90n^5 - 18n^4)t^2 - 36n^7 - 8n^6 + 12n^8 + 2n^9 + 12n^4 + 36n^5 - 2n^3 = 0$$

с дискриминантом

$$D = 108n^7(n-1)^2(n+1)^2(n^2-n-1)^3.$$

Следовательно, пространство

$$SO(2+n) / SO(1) \times SO(1) \times SO(n),$$

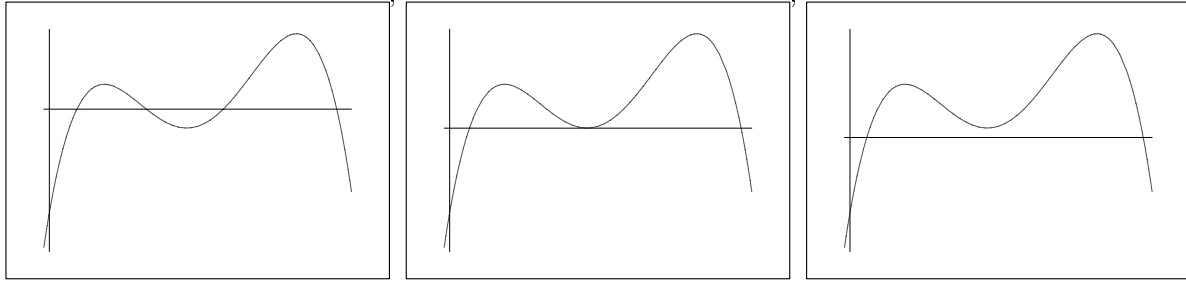
при $n \geq 2$, допускает единственную инвариантную метрику Эйнштейна.

Случай $a_1 < \frac{1}{2}$. В этом случае все асимптоты гипербол (2) пересекаются друг с другом, следовательно, количество решений системы может быть равно четырем. Следствием системы (2) будет уравнение четвертой степени

$$A(a_1, a_2, a_3)t^4 + B(a_1, a_2, a_3)t^3 + C(a_1, a_2, a_3)t^2 + D(a_1, a_2, a_3)t + E(a_1, a_2, a_3) = 0.$$

с коэффициентом $A(a_1, a_2, a_3) = (2a_1 - 1)(2a_1 + 1)(a_2 + a_2)^2 < 0$. Обозначим левую часть уравнения через $F(a_1, a_2, a_3, t)$.

В случае, когда производная функции $F(a_1, a_2, a_3, t)$ имеет три корня, возможны следующие случаи графика функции $F(a_1, a_2, a_3, t)$:



Количество решений системы в каждом случае равно четырем, трем и двум соответственно. Используя пакет MAPLE (операция SOLVE()) можно найти корни производной функции $F(a_1, a_2, a_3, t)$. Пусть $\alpha_i(a_1, a_2, a_3)$ – эти корни. Из рисунка ясно, что количество решений системы определяется знаком выражения

$$F(a_1, a_2, a_3, \alpha_1) \cdot F(a_1, a_2, a_3, \alpha_2) \cdot F(a_1, a_2, a_3, \alpha_3). \quad (3)$$

Примеры. Пространство $SU(3)/T_{max}$ в комплексной плоскости \mathbf{C} . В этом случае, все $a_i = \frac{1}{6}$. Следствием системы (2) является уравнение четвертой степени:

$$-8t^4 + 36t^3 - 56t^2 + 36t - 8 = 0.$$

С помощью функции SOLVE убеждаемся, что уравнение имеет четыре корня $\{2, \frac{1}{2}, 1, 1\}$. Решением системы (2) будут пары $\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 1\}, \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, определяющие четыре метрики Эйнштейна.

Пространство ортогональной группы

$$SO(n_1 + n_2 + n_3) / SO(n_1) \times SO(n_2) \times SO(n_3).$$

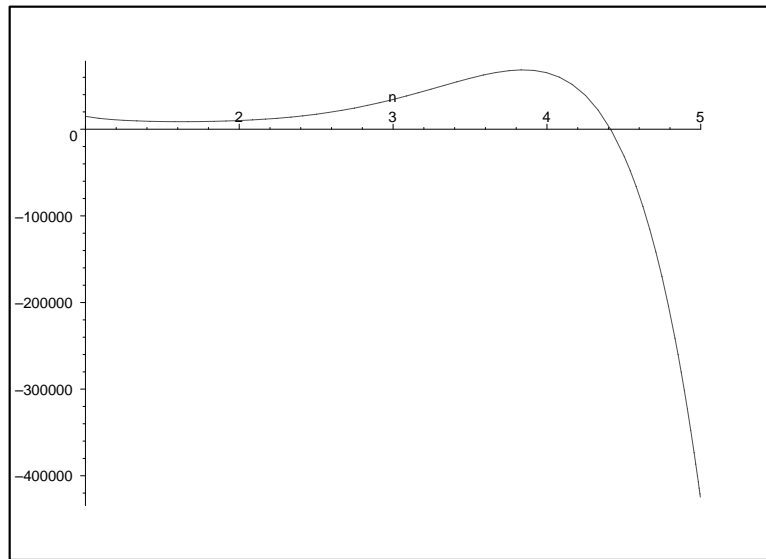
Положим $n_1 = n, n_2 = n + 1, n_3 = n + 2$. Следствием системы (2) будет уравнение :

$$F(n, t) = -(4n + 3)(2n - 1)(1 + 2n)^2 t^4 + 2(1 + 2n)(12n^2 + 6n - 1)(3n + 1)t^3 + (-8 - 56n - 200n^2 - 360n^3 - 224n^4)t^2 + 8(n + 1)(6n^2 + 4n + 1)(3n + 1)t - 16n(1 + 2n)(n + 1)^2 = 0$$

Дискриминант производной функции $F(n, t)$ имеет вид:

$$-\frac{16}{27}(507 + 6427n + 35008n^2 + 105708n^3 + 201703n^4 + 582618n^6 + 319915n^5 + 807076n^8 + 922294n^7 + 26880n^{12} + 31776n^{11} - 73728n^{10} + 211800n^9 + 18688n^{14} - 7424n^{13})(4n + 3)^2(2n - 1)^2 < 0,$$

и производная имеет три корня. График функции (3) представлен на рисунке.



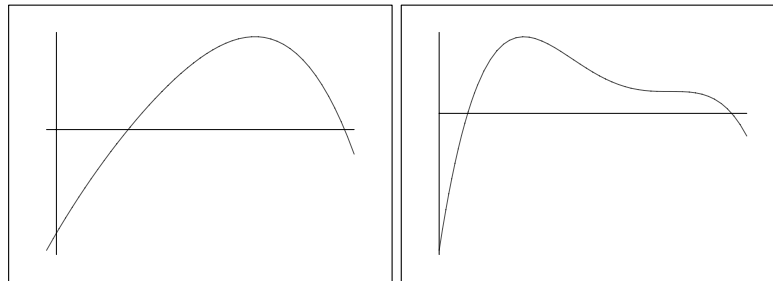
При $n = 1, 2, 3, 4$ однородное пространство допускает не более двух метрик, при $n \geq 5$ четыре метрики.

Пусть в симплектическом пространстве

$$Sp(n_1 + n_2 + n_3) / Sp(n_1) \times Sp(n_2) \times Sp(n_3)$$

$n_1 = u, n_2 = n_3 = v$. Тогда, следствием системы (2) будет уравнение

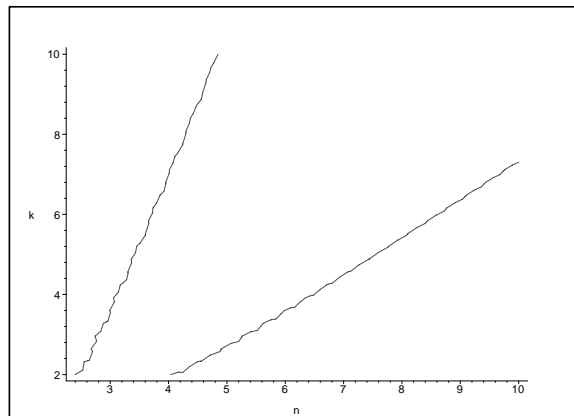
$$-(t-1)^2(v+u) \cdot (v+u-2t+2u^2+4v^2+6uv+3v^3+5u^2v+7uv^2+u^3-20tuv+6t^2uv+7t^2uv^2-18tuv^2-10tu^2v+5t^2u^2v+t^2v+t^2u+2t^2u^2+4t^2v^2+3t^2v^3+t^2u^3-10tv-6tu-6tu^2-10tv^3-16tv^2-2tu^3) = 0.$$



В каждом случае возможно лишь два корня функции F , следовательно, соответствующее однородное пространство допускает не более двух метрик Эйнштейна.

Положим в однородном пространстве

$$SO(n_1 + n_2 + n_3) / SO(n_1) \times SO(n_2) \times SO(n_3)$$



Дискриминант производной равен

$$D(u, v) = -\frac{4}{27} (9 + 52v + 100v^2 + 66v^3 + 34u + 132uv + 130uv^2 + 41u^2 + 80u^2v + 16u^3) \cdot (v + 1 + u)^2 (v + u)^2 (3v + 1 + u)^2 (u^2 + 2u + 1 + 4uv + 4v + 2uv^2 + 4v^2 + 2v^3)^3 < 0$$

Здесь, для разложения на множители, использована команда FACTOR(). Таким образом, уравнение имеет ровно три решения ($t = 1$ корень кратности два) и пространство допускает три инвариантные метрики Эйнштейна.

Пусть, теперь производная функции $F(a_1, a_2, a_3, t)$ имеет один или два корня. Тогда, варианты для графика функции $F(a_1, a_2, a_3, t)$ такие:

$n_1 = n_2 = n, n_3 = kn$. Пусть $D(n, k)$ – дискриминант производной функции $F(a_1, a_2, a_3, t)$. С помощью операции IMPLICITPLOT построим график неявно заданной функции $D(n, k) = 0$.

Вся первая четверть плоскости nOk разбивается на три части, в каждой из которых, дискриминант $D(n, k)$ сохраняет свой знак. Средней области соответствует знак «+», двум остальным — знак «-». В частности, все пространства $SO(2n + kn)/SO(n) \times SO(n) \times SO(kn)$ для кото-

рых точка (n, k) принадлежит средней области, допускают не более двух метрик Эйнштейна. Заметим, что уравнение $D(n, k) = 0$ не имеет решения в натуральных числах, т. е. производная функции $F(a_1, a_2, a_3, t)$ не может иметь два корня.

Библиографический список

1. Никоноров Ю.Г. Об одном классе однородных компактных многообразий Эйнштейна // Сиб. мат. Журнал. 2000. Т. 41. №1. С. 200-205.
2. Wallach N. Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature // Ann. Math. 1972. V. 96. P. 277-295.

О ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КОНЕЧНЫХ СУММ ОТ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Материал этой статьи продолжает исследование, начатое ранее, применительно к последовательностям функций от случайных величин, рассматриваемых в [1].

Рассмотрим последовательности случайных величин $\xi_{t \in I_n} \in \{-1, 1\}$ и последовательность функций от этих случайных величин $\{f_t(\xi_t)\}_{t \in I_n}$. В качестве функций будем рассматривать простейший случай, когда $f_t(\xi_t) = \theta_t \cdot \xi_t = \pi_t$, $\theta_t = \theta \neq 0 \quad \forall t \in I_n$.

По аналогии с определениями, данными в [1], будем пространство элементарных исходов последовательности $\pi_{t \in I_n}$ обозначать через Ω_n^π , а пространство значений случайных величин $Y_n = \{-\theta, \theta\}^n$.

Для $I = \{t_1, \dots, t_m\}$ обозначим через $v_I(\theta, n)$ следующую величину:

$$v_I(\theta, n) = \frac{1}{\theta^{|I|}} v_I(n), \tag{1}$$

где $v_I(n)$ - начальный смешанный момент случайных величин $\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_m}$ порядка $|I|$, $\forall I \subset I_n$, определенный в [1]. Эту величину, по аналогии с [1], будем называть начальным смешанным моментом случайных величин $\pi_{t_1}, \dots, \pi_{t_m}$ порядка $|I|$. Появление коэффициента в формуле (1) связано с тем обстоятельством, что функция от случайных величин не должна менять вероятности соответствующих событий. При таком выборе коэффициента это действительно выполняется (см. формулы (4), (5), (6)). Очевидно, что при $\theta = 1, \pi_t = \xi_t$ и $v_I(\theta, n) = v_I(n)$.

Аналогично введем в рассмотрение суммы смешанных моментов:

$$\begin{aligned} v_m(\theta, n) &= \sum_{|I|=m} v_I(\theta, n) = \\ &= \frac{1}{\theta^m} \sum_{|I|=m} v_I(n) = \frac{1}{\theta^m} v_m(n), \quad \forall m = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{2}$$

причем при $m = 0$, положим $v_0(\theta, n) = 1$.

Определим

$$\dot{v}_m(\theta, n) = \frac{v_m(\theta, n)}{C_n^m} = \frac{1}{\theta^m} \dot{v}_m(n), \quad \forall m = 1, \dots, n.$$

Значение случайной величины π_t в рассматриваемом событии $\omega \in \Omega_t^\pi$ будем обозначать через $y_t(\omega) = y_t \in Y_t$. Все обозначения далее аналогичны тому, как это определялось в [1].

Цилиндрические множества на Y_n с основанием на измеримом множестве $W^\pi \subset Y_I$ будем обозначать как

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(W^\pi) &= \mathfrak{J}_n(W^\pi) = \\ &= \{y | y \in Y_n, (y_{t_1}, \dots, y_{t_m}) \in W^\pi\} \end{aligned}$$

Кроме того, по аналогии с [1], обозначим

$$W_{I,\pi}(k) = \{y | y \in Y_I; \sum_{t \in I_n} y_t = \theta(2k - |I|)\}.$$

Отметим также, что:

$$|y_J|_I = \prod_{t \in I} y_t = \theta^{|I|} \prod_{t \in I} x_t = \theta^{|I|} |x_J|_I, \quad I \subseteq J$$

В частности, также несложно показать, что

$$\sum_{y \in Y_n} |y|_I = 0, \quad \forall I \subseteq I_n, |I| > 0.$$

Теперь рассмотрим основные результаты:

Теорема 1. Совместное распределение вероятностей случайных величин $\pi_{t \in I_n} \in \{-\theta, \theta\}$ и значения коэффициентов для этих случайных величин $v_I(\theta, n)$, $I \in \mathfrak{Z}(n)$ полностью определяют друг друга. При этом справедливы следующие соотношения:

$$v_I(\theta, n) = \frac{1}{\theta^{2|I|}} \sum_{y \in Y_n} |y|_I \cdot \mathbf{P}_n(y); \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(y) &= \frac{1}{2^n} \sum_{I \in \mathfrak{Z}(n)} |y|_I \cdot v_I(\theta, n) = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{I \in \mathfrak{Z}(n)} |x|_I \cdot v_I(n) = \mathbf{P}_n(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Доказательство: Покажем справедливость (3). Из определения $v_I(\theta, n)$ имеем, что $v_I(\theta, n) = \frac{1}{\theta^{|I|}} v_I(\xi) = \frac{1}{\theta^{|I|}} \sum_{x \in X_n} |x|_I \cdot \mathbf{P}_n(x) =$

$$= \left| \begin{array}{l} \mathbf{P}_n(x) = \mathbf{P}_n(y) \\ |x|_I = \frac{|y|_I}{\theta^{|I|}} \end{array} \right. = \frac{1}{\theta^{2|I|}} \sum_{y \in Y_n} |y|_I \cdot \mathbf{P}_n(y).$$

Для удобства доказательства (4), по аналогии с [1], перенумеруем произвольным образом все элементы $y \in Y_n$, а все элементы из $\mathfrak{Z}(n)$

расположим в порядке возрастания $|I|$. Количество и тех и других равно 2^n . Составим матрицу $A_m = \{a_{l,k} = \frac{|y_k|_I}{\theta^{2|I|}}\}$, где l - это номер множества $I \in \mathfrak{Z}(n)$, k - это номер элемента y_k в Y_n , а $m = 2^n$. Обозначим строку матрицы A_m как a_l и рассмотрим скалярное произведение двух строк

$$(a_l, a_r) = \sum_{k=1}^m a_{l,k} \cdot a_{r,k}.$$

Из $l = r \Rightarrow I = J$ и тогда

$$\begin{aligned} (a_l, a_l) &= \sum_{k=0}^m \frac{|y_k|_I}{\theta^{2|I|}} \cdot \frac{|y_k|_I}{\theta^{2|I|}} = \sum_{k=0}^m \frac{\theta^{|I|} |x_k|_I}{\theta^{2|I|}} \cdot \frac{\theta^{|I|} |x_k|_I}{\theta^{2|I|}} = \\ &= \frac{1}{\theta^{2|I|}} \sum_{k=0}^m |x_k|_I^2 = \frac{2^n}{\theta^{2|I|}}. \end{aligned}$$

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta^{-2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \theta^{-2} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \theta^{-4} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \theta^{-4} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \theta^{-2n} \end{pmatrix},$$

то из предыдущего следует, что $A_m \cdot A'_m = 2^n \cdot I_m$. Запишем теперь в векторной форме соотношение (3):

$$\vec{v}(\theta, n) = A'_m \cdot \vec{P}_n(y).$$

$$I_m^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta^2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \theta^2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \theta^4 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \theta^4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \theta^{2n} \end{pmatrix},$$

при умножении слева на I_m^{-1} получаем

$$\vec{P}_n(y) = \frac{1}{2^n} I_m^{-1} A_m \cdot \vec{v}(\theta, n),$$

откуда и следует (4) \square .

Рассмотрим сумму случайных величин $S_{n,\pi} = \sum_{t=1}^n \pi_t$ и получим соотношения, связывающие вероятность появления ровно k поло-

При $l \neq r \Rightarrow I \neq J$ и предположим, что $U = (I \cup J) \setminus (I \cap J) \neq \emptyset$ тогда

$$\begin{aligned} (a_l, a_r) &= \sum_{k=0}^m |y_k|_I \cdot |y_k|_J = \\ &= \sum_{k=0}^m |y_k|_{I \cap J}^2 \cdot |y_k|_U = \theta^{2(I \cap J)} \sum_{k=0}^m |y_k|_U = 0. \end{aligned}$$

В случае, когда $U = (I \cup J) \setminus (I \cap J) = \emptyset$, получаем аналогичный результат.

Обозначим теперь транспонированную матрицу как A'_m , а через I_m обозначим диагональную матрицу на главной диагонали которой стоят коэффициенты вида $\theta^{-2|I|}$, то есть

При умножении слева на A_m получаем

$$\begin{aligned} A_m \cdot \vec{v}(\theta, n) &= A_m \cdot A'_m \cdot \vec{P}_n(y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow I_m \vec{P}_n(y) = \frac{1}{2^n} A_m \cdot \vec{v}(\theta, n). \end{aligned}$$

Учитывая, что

жительных членов в последовательности π_t , (в этом случае $S_{n,\pi} = \theta(2k - n)$; $k = 0, \dots, n$) со значениями смешанных моментов этих случайных величин.

Теорема 2. Для случайных величин $\pi_{t \in I_n} \in \{-\theta, \theta\}$, справедливы следующие соотношения

ношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_{n,\pi} = \theta(2k - n)) &= \mathbf{P}_{n,\pi}(k) = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \theta^m v_m(\theta, n) \cdot A_n(m, k) = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n v_m(n) \cdot A_n(m, k) = \\ &= \mathbf{P}(S_{n,\xi} = 2k - n) = \mathbf{P}_{n,\xi}(k) \end{aligned} \quad (5)$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_{n,\pi} = \theta(2k - n)) &= \mathbf{P}_{n,\pi}(k) = \\ &= \frac{C_n^k}{2^n} \sum_{m=0}^n \theta^m \dot{v}_m(\theta, n) \cdot B_n(m, k) = \\ &= \frac{C_n^k}{2^n} \sum_{m=0}^n \dot{v}_m(n) \cdot B_n(m, k) = \\ &= \mathbf{P}(S_n = 2k - n) = \mathbf{P}_{n,\xi}(k) \end{aligned} \quad (6)$$

и

$$\begin{aligned} v_m(\theta, n) &= \\ &= \frac{1}{\theta^m} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}_{n,\pi}(k) \cdot B_n(m, k) \quad \forall m \geq 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Доказательство: При использовании формулы (4) нам будет удобнее ее использовать в следующем виде:

$$\mathbf{P}_n(y) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \sum_{|I|=m} |y|_I \cdot v_I(\theta, n).$$

Тогда, по аналогии с доказательством теоремы 2 в [1], получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(W_\pi(k)) &= \mathbf{P}_{n,\pi}(k) = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{y \in W_\pi(k)} \sum_{m=0}^n \sum_{|I|=m} |y|_I \cdot v_I(\theta, n) = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \sum_{|I|=m} v_I(\theta, n) \sum_{y \in W_\pi(k)} |y|_I = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \theta^m \sum_{|I|=m} v_I(\theta, n) \sum_{x \in W(k)} |x|_I = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \theta^m A_n(m, k) \sum_{|I|=m} v_I(\theta, n) = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \theta^m A_n(m, k) v_m(\theta, n). \end{aligned}$$

Формула (6) получается из (5) при помощи формулы (1) из [1]. Далее из (5) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n,\pi}(k) \cdot B_n(l, k) &= \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \theta^m v_m(\theta, n) \cdot A_n(m, k) \cdot B_n(l, k). \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой (8) из [1] и формулами (2) и (6), получаем

$$\begin{aligned} v_m(\theta, n) &= \frac{1}{\theta^m} v_m(n) = \frac{1}{\theta^m} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}_{n,\xi}(k) \cdot B_n(m, k) = \\ &= \frac{1}{\theta^m} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}_{n,\pi}(k) \cdot B_n(m, k). \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 3.1 Пусть заданы случайные величины $\pi_{t \in I_n} \in \{-\theta, \theta\}$ и сумма этих случайных величин S_n имеет распределение вероятностей $\mathbf{P}_n(S_n = \theta(2k - n)) = \mathbf{P}_{n,\xi}(k) \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$. Тогда для случайных величин $\hat{\pi}_{t \in I_n} \in \{-\theta, \theta\}$ (смешанные моменты которой обозначим как $\hat{v}_I(\theta, n)$, $\forall I \subset I_n$) с вероятностной мерой

$$\mathbf{P}_{n,\hat{\pi}}(y) = \frac{\mathbf{P}_{n,\pi}(k)}{C_n^k}$$

$$\forall y \in W_\pi(k) \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (8)$$

справедливы следующие соотношения:

$$1. \quad \mathbf{P}_{n,\hat{\pi}}(k) = \mathbf{P}_{n,\pi}(k), \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (9)$$

$$2. \quad \forall I, J \subset I_n \text{ таких, что } |I| = |J| = m$$

$$\hat{v}_I(\theta, n) = \hat{v}_J(\theta, n) = \frac{v_m(\theta, n)}{C_n^m} = \dot{v}_m(\theta, n), \quad (10)$$

3. Пусть $\forall J \subset I_n$ такого, что $|J| = m \leq n$ заданы множества $D_{I_m} \uparrow D_J$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(\hat{\pi}_{t \in I_m} \in D_{I_m}) &= \mathbf{P}_{n,\hat{\pi}}(\mathcal{J}_n(D_{I_m})) = \\ &= \mathbf{P}_{n,\hat{\pi}}(\mathcal{J}_n(D_J)) = \mathbf{P}_n(\hat{\pi}_{\tau(t)|t \in I_m} \in D_{I_m}). \end{aligned} \quad (11)$$

4. Случайные величины

$$\hat{\pi}_t - \text{одинаково распределены, } t = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Доказательство: Если задать вероятность на (Y_n, \mathcal{A}_n) формулой (8), то из

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n,\hat{\pi}}(k) &= \sum_{y \in W(k)} \mathbf{P}_{n,\hat{\pi}}(y) = \frac{\mathbf{P}_{n,\pi}(k)}{C_n^k} \sum_{y \in W(k)} 1 = \\ &= \frac{\mathbf{P}_{n,\pi}(k)}{C_n^k} \cdot C_n^k = \mathbf{P}_{n,\pi}(k) \end{aligned}$$

следует (9).

Из формул (1),(4),(9) статьи [1] и (7) будем иметь, что если $|I| = m$, то

$$\begin{aligned} \hat{v}_I(\theta, n) &= \frac{1}{\theta^{2|I|}} \sum_{y \in Y_n} |y|_I \mathbf{P}_{n, \hat{\pi}}(y) = \\ &= \frac{1}{\theta^{2|I|}} \sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{P}_{n, \pi}(k)}{C_n^k} \cdot \sum_{y \in W_k} |y|_I = \\ &= \frac{1}{\theta^{|I|}} \sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{P}_{n, \pi}(k)}{C_n^k} \cdot A_n(m, k) = \\ &= \frac{1}{\theta^{|I|}} \frac{1}{C_n^m} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}_n(k) \cdot B_n(m, k) = \\ &= \frac{1}{\theta^{|I|}} \frac{v_m(n)}{C_n^m} = \hat{v}_m(\theta, n). \end{aligned}$$

Отсюда следует (10).

Покажем, что выполняется соотношение (11). Для этого отметим, что взаимно однозначное соответствие между элементами D_{I_m} и D_J можно аналогичным образом продолжить на $\mathcal{J}_n(D_{I_m})$ и $\mathcal{J}_n(D_J)$. И тогда очевидно, что векторы(элементы) $y \in \mathcal{J}_n(D_{I_m})$ и $y' \in \mathcal{J}_n(D_J)$ ($y \leftrightarrow y'$) будут иметь одинаковую вероятность для случайных величин $\hat{\pi}_t$. Отсюда сразу следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n, \hat{\pi}}(\mathcal{J}_n(D_{I_m})) &= \sum_{y \in \mathcal{J}_n(D_{I_m})} \mathbf{P}_{n, \hat{\pi}}(y) = \\ &= \sum_{y' \in \mathcal{J}_n(D_J)} \mathbf{P}_{n, \hat{\pi}}(y') = \mathbf{P}_{n, \hat{\pi}}(\mathcal{J}_n(D_J)). \end{aligned}$$

Справедливость соотношения (12) сразу следует из (11) в случае $|J| = 1$. \square

Покажем аналогичный результат для решетчатых случайных величин. Пусть, как и ранее (см. [1]), $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\theta(2k_1 - s), \theta(2k_2 - s), \dots, \theta(2k_n - s)) \in X_n(\theta, s)$, а $\sum_{i=1}^n k_i = k$. Тогда

Теорема 3.2 Пусть заданы случайные величины $\xi_{t \in I_n} \in X(\theta, s)$ и сумма этих случайных величин S_n имеет распределение вероятностей $\mathbf{P}_n(S_n = \theta(2k - ns)) = \mathbf{P}_{n, \xi}(k)$ $k = 0, 1, \dots, ns$. Тогда существуют случайные величины

$$\hat{\xi}_{t \in I_n} \in X(\theta, s)$$

с вероятностной мерой

$$\mathbf{P}_{n, \hat{\xi}}(x) = \frac{\mathbf{P}_{n, \xi}(k)}{\sum_{k_1 + \dots + k_n = k} C_s^{k_1} \cdot \dots \cdot C_s^{k_n}}$$

$$\forall x \in W_{\hat{\xi}}(k) \quad k = 0, 1, \dots, ns \quad (13)$$

такие, что для них справедливы следующие соотношения:

$$1. \mathbf{P}_{n, \hat{\xi}}(k) = \mathbf{P}_{n, \xi}(k), \quad k = 0, 1, \dots, ns \quad (14)$$

2. Пусть $\forall J \subset I_n$ такого, что $|J| = m \leq n$ заданы множества $D_{I_m} \uparrow D_J$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n, \hat{\xi}}(\hat{\xi}_{t \in I_m} \in D_{I_m}) &= \mathbf{P}_{n, \hat{\xi}}(\mathcal{J}_n(D_{I_m})) = \\ &= \mathbf{P}_{n, \hat{\xi}}(\mathcal{J}_n(D_J)) = \mathbf{P}_{n, \hat{\xi}}(\hat{\xi}_{\tau(t)|t \in I_m} \in D_{I_m}). \end{aligned} \quad (15)$$

3. $\forall I, J \subset I_n$ таких, что $|I| = |J| = m$

$$\hat{v}_I(\theta, n) = \hat{v}_J(\theta, n) = \frac{\hat{v}_m(\theta, n)}{C_{ns}^m}, \quad (16)$$

4. Случайные величины $\hat{\xi}_t$

- одинаково распределены, $t = 1, \dots, n$. (17)

Доказательство: Для распределения вероятностей $\mathbf{P}_{n, \xi}(k)$, $k = 0, 1, \dots, ns$ по **теореме 3.1** можно построить последовательность случайных величин $\hat{\gamma}_{t \in I_{ns}} \in \{-\theta, \theta\}$, которые будут удовлетворять условиям (8)-(12) **теоремы 3.1**. Определим последовательность случайных величин $\hat{\xi}_{t \in I_n} \in X(\theta, s)$ следующим образом:

$$\hat{\xi}_t = \sum_{j=0}^{s-1} \hat{\gamma}_{t+j \cdot n},$$

и покажем, что для таким образом определённой последовательности случайных величин $\hat{\xi}_{t \in I_n}$, задание вероятностной меры (13) будет корректно. Действительно, если мы рассмотрим $y \in Y_{ns}$ такой, что $\sum_{i=1}^{ns} y_i = \theta(2k - ns)$, то для значений случайных величин, построенной нами последовательности, будет выполняться соотношение $\sum_{i=1}^n x_i = \theta(2k - ns)$ так, как тогда

$$x_i = \sum_{j=0}^{s-1} y_{t+j \cdot n} = \theta(2k_i - s),$$

а

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n \theta(2k_i - s) = \theta(2 \sum_{i=1}^n k_i - ns) = \\ &= \theta(2k - ns) \Rightarrow \sum_{i=1}^n k_i = k. \end{aligned}$$

Разница только в количестве элементов $y \in W_{ns}(k)$ и $x \in W_n(k)$, для которых выполняются эти соотношения. Ясно, что каждый элемент $x \in W_n(k)$ может быть получен из различных элементов $y \in W_{ns}(k)$, которые отличаются друг от друга перестановками некоторых своих координат. Поэтому в теореме 3.1 в знаменателе формулы (8) стоит C_n^k - число всех сочетаний по k положительных значений случайных величин $y \in W_n(k)$, а знаменателе теоремы 3.2 формулы (13) стоит $\sum_{k_1+\dots+k_n=k} C_s^{k_1} \cdot \dots \cdot C_s^{k_n}$ - только та часть сочетаний по k положительных значений

случайных величин $y \in W_{ns}(k)$, которая порождает различные значения $x \in W_n(k)$. Отметим, что при $s = 1$: $\sum_{k_1+\dots+k_n=k} C_s^{k_1} \cdot \dots \cdot C_s^{k_n} = C_n^k$.

Очевидно, что таким образом построенная последовательность удовлетворяет условиям (14),(15) теоремы.

Из (15) и определения $\hat{v}_I(\theta, n)$ получаем $\forall I, J \subset I_n \quad \hat{v}_I(\theta, n) = \hat{v}_J(\theta, n)$, а согласно определению $\hat{v}_m(\theta, n)$ тогда $\hat{v}_I(\theta, n) = \frac{\hat{v}_m(\theta, n)}{C_n^m}$.

Соотношение (17) непосредственно следует из (15) в случае, когда $m = 1$. \square

Библиографический список

1. Чеботарев С.В. Об эквивалентности конечных сумм случайных величин //Вестник БГПУ, се-

рия: естественные и точные науки. 2004. Вып. 4. С. 108-116.

О СУЩЕСТВОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СУММОЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ СВОЙСТВА

Материал данной статьи продолжает исследование начатые в статьях [2] – [4].

Рассмотрим последовательности случайных величин $\pi_t = \theta \xi_t \in \{-\theta; \theta\}$; $t = 1, 2, \dots$, где $\xi_t \in \{-1; 1\}$ и $\theta = \text{const} \neq 0$. Для конечных подпоследовательностей последовательности π_t : $\pi_{t \in I_n}$ и $\pi_{t \in I_{n+1}}$ построим последовательности $\hat{\pi}_{t \in I_n}$ и $\hat{\pi}_{t \in I_{n+1}}$ удовлетворяющие условиям (9)-(12) теоремы 3.1 [4]. Тогда степень согласованности вероятностных мер, определенных на Y_n для $\hat{\pi}_{t \in I_n}$ и на Y_{n+1} для $\hat{\pi}_{t \in I_{n+1}}$ определяется следующим образом:

Лемма 1.

$$\mathbf{P}_n(\hat{\pi}_{t \in I_n} \in B) \leq \mathbf{P}_{n+1}(\hat{\pi}_{t \in I_{n+1}} \in B \times \{-\theta, \theta\}),$$

$$\forall B \in Y_n = \{-\theta, \theta\}^n.$$

Доказательство: Число элементов любого множества $B \in Y_n$ можно представить в виде суммы $\sum_{k=0}^n l_k$, где l_k - число элементов из

$$B \cap W_{n,\pi}(k). \text{ Тогда } \mathbf{P}_n(\hat{\pi}_{t \in I_n} \in B) = \sum_{k=0}^n \gamma_k \cdot$$

$$\mathbf{P}_n(S_n = \theta(2k - n)) = \sum_{t=1}^n \pi_t, \text{ где } \gamma_k = \frac{l_k}{C_n^k}.$$

Для того, чтобы сравнить $\mathbf{P}_n(\hat{\pi}_{t \in I_n} \in B)$ с $\mathbf{P}_{n+1}(\hat{\pi}_{t \in I_{n+1}} \in B \times \{-\theta, \theta\})$ покажем два соотношения, предварительно введя необходимые обозначения:

$$\mathbf{P}_{n,\pi}(k) = \mathbf{P}_n(S_n = \sum_{t=1}^n \pi_t = \theta(2k - n));$$

$$\mathbf{P}_{n,\hat{\pi}}(k) = \mathbf{P}_n(\hat{S}_n = \sum_{t=1}^n \hat{\pi}_t = \theta(2k - n));$$

$$W_{n+1}^-(k) = \{\pi \mid \pi \in Y_{n+1},$$

$$\sum_{t \in I_n} \pi_t = \theta(2k - (n+1)), \pi = (\pi_1, \dots, \pi_n, -\theta)\};$$

$$W_{n+1}^+(k) = \{\pi \mid \pi \in Y_{n+1},$$

$$\sum_{t \in I_n} \pi_t = \theta(2k - (n+1)), \pi = (\pi_1, \dots, \pi_n, \theta)\};$$

$$\alpha_{k,0} = \frac{\sum_{\pi_{t \in I_{n+1}} \in W_{n+1}^-(k)} \mathbf{P}_{n+1}(\pi_{t \in I_{n+1}})}{\mathbf{P}_{n+1,\pi_{t \in I_{n+1}}}(k)};$$

$$\alpha_{k,1} = \frac{\sum_{\pi_t \in W_{n+1}^+(k+1)} \mathbf{P}_{n+1}(\pi_t)}{\mathbf{P}_{n+1,\pi}(k+1)}.$$

Для $\hat{\pi}_{t \in I_{n+1}}$ будем использовать аналогичные обозначения – $W_{n+1}^+(k)$; $W_{n+1}^-(k)$.

Из определения $\alpha_{k,0}, \alpha_{k,1}$ сразу следует, полагая $\alpha_{-1,1} = \alpha_{n+1,0} = 0$, что

$$\alpha_{k,0}, \alpha_{k,1} \in [0, 1] \text{ и } \alpha_{k,0} + \alpha_{k-1,1} = 1$$

$$\forall k = 0, 1, \dots, n+1.$$

Тогда справедливы два соотношения:

$$\mathbf{P}_{n+1}(\hat{\pi} \in B \times \{-\theta, \theta\}) = \sum_{k=0}^{n+1} \gamma'_k \cdot \mathbf{P}_{n+1,\pi}(k),$$

$$\text{где } \gamma'_k = \frac{l_k + l_{k-1}}{C_{n+1}^k}; \quad (1)$$

$$\mathbf{P}_{n,\pi}(k) =$$

$$= \alpha_{k,0} \cdot \mathbf{P}_{n+1,\pi}(k) + \alpha_{k,1} \cdot \mathbf{P}_{n+1,\pi}(k+1). \quad (2)$$

Соотношение (1) легко вывести исходя из того, что $\forall \hat{\pi}_{t \in I_{n+1}} \in B \times \{-\theta, \theta\}$ справедливо представление: $\hat{\pi}_{t \in I_{n+1}} = (\hat{\pi}_{t \in I_n}, \theta)$ либо $\hat{\pi}_{t \in I_{n+1}} = (\hat{\pi}_{t \in I_n}, -\theta)$, где $\hat{\pi}_{t \in I_n} \in B$.

Соотношение 2 следует из того, что

$$\mathbf{P}_{n,\pi}(k) = \sum_{\pi \in W_{n+1}^-(k)} \mathbf{P}_{n+1}(\pi) + \sum_{\pi \in W_{n+1}^+(k+1)} \mathbf{P}_{n+1}(\pi) =$$

$$= \alpha_{k,0} \cdot \mathbf{P}_{n+1,\pi}(k) + \alpha_{k,1} \cdot \mathbf{P}_{n+1,\pi}(k+1).$$

Рассмотрим теперь

$$\mathbf{P}_n(\hat{\pi}_{t \in I_n} \in B) = \sum_{k=0}^n \gamma_k \mathbf{P}_{n,\pi}(k) =$$

$$= \sum_{k=0}^n \gamma_k (\alpha_{k,0} \cdot \mathbf{P}_{n+1,\pi}(k) + \alpha_{k,1} \cdot \mathbf{P}_{n+1,\pi}(k+1)) =$$

$$= \sum_{k=0}^n \gamma_k \alpha_{k,0} \mathbf{P}_{n+1,\pi}(k) + \sum_{k=0}^n \gamma_k \alpha_{k,1} \mathbf{P}_{n+1,\pi}(k+1) =$$

$$= \sum_{k=0}^n \gamma_k \alpha_{k,0} \mathbf{P}_{n+1,\pi}(k) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_{k-1} \alpha_{k-1,1} \mathbf{P}_{n+1,\pi}(k) = \begin{cases} \gamma_{n+1}=0 \\ \gamma_{-1}=0 \end{cases} \\
 & = \sum_{k=0}^{n+1} \gamma_k \alpha_{k,0} \mathbf{P}_{n+1,\pi}(k) + \\
 & + \sum_{k=0}^{n+1} \gamma_{k-1} \alpha_{k-1,1} \mathbf{P}_{n+1,\pi}(k) = \\
 & = \sum_{k=0}^{n+1} (\gamma_k \alpha_{k,0} + \gamma_{k-1} \alpha_{k-1,1}) \mathbf{P}_{n+1,\pi}(k) = \\
 & = \sum_{k=0}^{n+1} \dot{\gamma}_k \mathbf{P}_{n+1,\pi}(k).
 \end{aligned}$$

Сравним коэффициенты при $\mathbf{P}_{n+1,\pi}(k)$ в полученной формуле с соответствующими коэффициентами соотношения (1). Имеем с одной стороны

$$\dot{\gamma}_k = \gamma_k \alpha_{k,0} + \gamma_{k-1} \alpha_{k,1},$$

а с другой стороны

$$\gamma'_k = \frac{l_k}{C_{n+1}^k} + \frac{l_{k-1}}{C_{n+1}^{k-1}}, \quad k = 0, 1, \dots, n+1.$$

Причем учитывая, что $l_{n+1} = l_{-1} = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
 \gamma_k & = \frac{l_k}{C_n^k} = \frac{l_k}{C_{n+1}^k} \cdot \frac{n+1-k}{n+1} \leq \frac{l_k}{C_{n+1}^k} \\
 \gamma_{k-1} & = \frac{l_{k-1}}{C_n^{k-1}} = \frac{l_{k-1}}{C_{n+1}^{k-1}} \cdot \frac{k}{n+1} \leq \frac{l_{k-1}}{C_{n+1}^{k-1}}.
 \end{aligned}$$

Откуда

$$\frac{l_k}{C_n^k} + \frac{l_{k-1}}{C_n^{k-1}} \leq \frac{l_k}{C_{n+1}^k} + \frac{l_{k-1}}{C_{n+1}^{k-1}}$$

и тем более $\dot{\gamma}_k \leq \gamma'_k$, что и доказывает утверждение. \square

Теорема 1. Пусть задана последовательность $\xi_t \in \{-1; 1\}$, $t = 1, 2, \dots$. Для произвольного $\alpha \in (0, 1]$ обозначим через S_α случайную величину $S_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} \sum_{t=1}^n \xi_t$ (не обязательно собственную при $\alpha \neq 1$). Тогда существует стационарная в узком смысле последовательность $\hat{\xi}_t \in \{-1; 1\}$, $t = 1, 2, \dots$ такая, что

$$S_\alpha \stackrel{n.}{=} \hat{S}_\alpha, \quad \text{где } \hat{S}_\alpha \stackrel{n.}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} \sum_{t=1}^n \hat{\xi}_t, \quad (3)$$

для которой при любых $I, J \subset N$ таких, что $|I| = |J| = m$ справедливо

$$\hat{v}_I = \hat{v}_J = \hat{v}_m, \quad (4)$$

при условии, что существует

$$\dot{v}_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_m(n)}{C_n^m} < \infty.$$

Доказательство: Из леммы 1, для случая $\theta = 1$ когда $\pi_t = \xi_t$, следует измеримость любого цилиндрического множества $\mathcal{J}(B_n) \in X_N$ с основанием на $B_n \in X_n$, как предела ограниченной неубывающей последовательности. Это позволяет продолжить вероятность \mathbf{P}_ξ на произвольные множества $B \in X_N$ используя представление

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{J}(B_n), \quad (5)$$

где B_n — суть проекция B на X_n .

Покажем стационарность в узком смысле последовательности $\hat{\xi}_t$, $t = 1, 2, \dots$. Для этого построим последовательность $\eta_t = \hat{\xi}_{t+k}$, $t = 1, 2, \dots$ и воспользуемся соотношением 14 теоремы 3.1 [3].

Возьмем в качестве $I = \{1, \dots, n\}$, $J = \{k+1, \dots, n+k\}$ и $\tau(t) = t+k$. По теореме 3.1 [3] для $\hat{\xi}_{t \in I_{n+k}}$ имеем, что

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}_n((\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n) \in B_I \subseteq X_I) = \\
 & = \mathbf{P}_n((\hat{\xi}_{k+1}, \dots, \hat{\xi}_{n+k}) \in B_J \subseteq X_J), \\
 & \quad \forall B_I \subset X_I \text{ и } B_J \uparrow B_I.
 \end{aligned}$$

Откуда по построению последовательности η_t и множества B_J имеем, что

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}_n((\hat{\xi}_{k+1}, \dots, \hat{\xi}_{n+k}) \in B_J \subseteq X_J) = \\
 & = \mathbf{P}_n((\eta_1, \dots, \eta_m) \in B_I \subseteq X_I), \quad \forall B_I \subset X_I
 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}_n((\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n) \in B_I) = \\
 & = \mathbf{P}_n((\hat{\xi}_{k+1}, \dots, \hat{\xi}_{n+k}) \in B_I) \quad \forall B_I \subset X_I.
 \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к цилиндрическим множествам, получаем

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}((\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n, \dots) \in \mathcal{J}(B_I)) = \\
 & = \mathbf{P}((\hat{\xi}_{k+1}, \dots, \hat{\xi}_{n+k}, \dots) \in \mathcal{J}(B_I)), \quad \text{где } \mathcal{J}(B_I) \subseteq X_N.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что равенство верно $\forall n \in N$, в конечном итоге, используя (19), получаем что

$$\mathbf{P}(\hat{\xi}_1, \dots \in B) = \mathbf{P}(\hat{\xi}_{k+1}, \dots \in B), \quad \forall B \in X_N. \quad (6)$$

Рассмотрим некоторое $\alpha \in (0; 1]$. По построению имеем

$$\mathbf{P}_n(\hat{S}_{n,\alpha} = y_k) = \mathbf{P}_n(S_{n,\alpha} = y_k) = \mathbf{P}_{n,\pi}(W_n(k)),$$

где

$$\begin{aligned} \pi_t &= \theta_n \xi_t, \quad t \in I_n, \quad y_k = \theta_n(2k - n), \\ \theta_n &= n^{-\alpha}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Отсюда для произвольного фиксированного y и n

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(S_{n,\alpha} < y) &= \sum_{y_k < y} \mathbf{P}_n(S_{n,\alpha} = y_k) = \\ &= \sum_{y_k < y} \mathbf{P}(\hat{S}_{n,\alpha} = y_k) = \mathbf{P}(\hat{S}_{n,\alpha} < y). \end{aligned} \quad (7)$$

Покажем существование предела при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} W_{n,\alpha}(y) &= \{\pi_t : \pi_t \in Y_n, S_{n,\alpha} = \\ &= \theta_n(2k - n) = y_k < y\}; \\ W_{n,\alpha}^+(y) &= \{\pi_t : \pi_t \in Y_{n+1}, \pi_t = \\ &= (\pi'_t; \theta), \text{ где } \pi'_t \in W_{n,\alpha}(y)\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} W_{n,\alpha}^-(y) &= \{\pi_t : \pi_t \in Y_{n+1}, \pi_t = (\pi'_t; -\theta), \\ &\text{где } \pi'_t \in W_{n,\alpha}(y)\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $W_{n,\alpha}^-(y) \subset W_{n+1,\alpha}(y)$, выясним соотношение между $W_{n,\alpha}^+(y)$ и $W_{n+1,\alpha}(y)$. Пусть $l_n^* = \max_{-n \leq l \leq n} \{\theta_n(2l - n) < y\}$. Если $k = l_n^*$, то

$$\begin{aligned} -\frac{2}{n^\alpha} &\leq \frac{2k - n}{n^\alpha} - y = -\epsilon \leq 0, \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \epsilon \leq \frac{2}{n^\alpha} \Leftrightarrow 0 \leq n^\alpha \epsilon \leq 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая, что $k = l_n^*$, рассмотрим справедливость следующего соотношения

$$\begin{aligned} W_{n+1,\alpha}(y) &\subseteq \left\{ \pi_t : \pi_t \in Y_{n+1}, S_{n+1,\alpha} = \right. \\ &= \left. \theta_{n+1}(2(k+1) - (n+1)) \right\} = W_{n,\alpha}^+(y). \end{aligned}$$

Для этого рассмотрим справедливость начиная с некоторого $n \geq n(y)$ неравенства

$$\frac{2(k+1) - (n+1)}{(n+1)^\alpha} \geq y. \quad (9)$$

Выполнение неравенства (9) означает справедливость соотношения $W_{n+1,\alpha}(y) \subseteq W_{n,\alpha}^+(y)$ начиная с $n \geq n(y)$. Проверим это

$$\begin{aligned} \frac{2(k+1) - (n+1)}{(n+1)^\alpha} &\geq y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2k - n + 1}{n^\alpha} - \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha y &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \epsilon - \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha - 1\right)y + \frac{1}{n^\alpha} &\geq 0 \end{aligned}$$

Откуда

$$n^\alpha \epsilon - ((n+1)^\alpha - n^\alpha)y + 1 \geq 0,$$

или

$$n^\alpha \epsilon + 1 \geq ((n+1)^\alpha - n^\alpha)y.$$

Учитывая, что для $\forall \alpha \in (0, 1)$ $(n+1)^\alpha - n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ и $0 < n^\alpha \epsilon \leq 2$ получаем, что начиная с некоторого $n = n(y)$ неравенство (9) будет выполняться и следовательно $\forall n > n(y) \quad W_{n+1,\alpha}(y) \subseteq W_{n,\alpha}^+(y)$, откуда

$$\begin{aligned} W_{n+1,\alpha}(y) &\subseteq W_{n,\alpha}^+(y) + W_{n,\alpha}^-(y) = \\ &= W_{n,\alpha}(y) \times \{\theta; -\theta\}. \end{aligned}$$

Следовательно и

$$\mathbf{P}_{n+1}(S_{n+1,\alpha} < y) \leq \mathbf{P}_n(S_{n,\alpha} < y).$$

То есть предел существует как предел ограниченной снизу невозрастающей последовательности.

В случае $\alpha = 1$ имеем $(n+1)^\alpha - n^\alpha = 1$ и из $n^\alpha \epsilon + 1 \geq ((n+1)^\alpha - n^\alpha)y$ следует $n\epsilon + 1 \geq y$, что всегда выполняется при $y \leq 1$, а так как область значений случайной величины $S_1 \in [-1; 1]$, то существование предела для $\mathbf{P}(S_\alpha < y)$, где $\alpha \in (0, 1]$, доказано. Существование предела для $\mathbf{P}(\hat{S}_\alpha < y)$ и сохранение равенства следует из (7). Соотношение (4) непосредственно следует из соотношения (13) теоремы 3.1 [3]. \square

Рассмотрим последовательности случайных величин, имеющих решетчатое распределение $\xi_t \in X_1(\theta, s)$, $t = 1, 2, \dots$

Определим, по аналогии с предыдущим

$$W_I(k) = \{x_I | x_I \in X_I, \frac{1}{\theta} \sum_{t \in I} x_t = 2k - |I| \cdot s\},$$

$$\forall k = 0, 1, \dots, |I| \cdot s.$$

Причем $x_t = \theta(2k_t - s)$, а $k = \sum_{t \in I} k_t$.

Пусть дана последовательность $\xi_t \in X_1(\theta, s)$. Для её конечных подпоследовательностей $\xi_{t \in I_n}$ и $\xi_{t \in I_{n+1}}$ построим последовательности $\hat{\xi}_{t \in I_n}$ и

$\hat{\xi}_{t \in I_{n+1}}$ удовлетворяющие условиям (17) – (20) теоремы 3.2 [3]. Тогда степень согласованности вероятностных мер, определенных на $X_n(\theta, s)$ для $\hat{\xi}_{t \in I_n}$ и на $X_{n+1}(\theta, s)$ для $\hat{\xi}_{t \in I_{n+1}}$ определяется следующим образом:

Лемма 2.

$$\mathbf{P}_n(\hat{\xi}_{t \in I_n} \in B) \leq \mathbf{P}_{n+1}(\hat{\xi}_{t \in I_{n+1}} \in B \times X_1(\theta, s)),$$

$$\forall B \in X_n(\theta, s). \quad (10)$$

Доказательство: Непосредственно следует из леммы 1 в следствие справедливости представления

$$\hat{\xi}_t = \sum_{j=0}^{s-1} \hat{\gamma}_{t+n \cdot j} \quad \forall t \in I_n, \quad (11)$$

где последовательность $\hat{\gamma}_{t \in I_{ns}} \in \{-\theta, \theta\}$ построена по теореме 1 в соответствие с распределением вероятностей $\mathbf{P}_{n,\xi}(k) \forall k = 0, 1, \dots, ns$ последовательности $\xi_{t \in I_n}$ и того факта, что $\forall B \in X_n(\theta, s)$ используя представление (11) можно взаимнооднозначно сопоставить $B' \in Y_{ns} = \{-\theta, \theta\}^{ns}$ такое, что $\mathbf{P}_{n,\xi}(\hat{\xi}_{t \in I_n} \in B) = \mathbf{P}_{ns,\hat{\gamma}}(\hat{\gamma}_{t \in I_{ns}} \in B')$. \square

Теорема 2. Пусть задана последовательность $\xi_t \in X_1(\theta, s)$, $t = 1, 2, \dots$. Для произвольного $\alpha \in (0, 1]$ обозначим через S_α случайную величину $S_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} \sum_{t=1}^n \xi_t$. Тогда существует стационарная в узком смысле последовательность $\hat{\xi}_t \in X_1(\theta, s)$, $t = 1, 2, \dots$, такая, что

$$\hat{S}_\alpha \stackrel{\text{п. н.}}{=} S_\alpha,$$

$$\text{где } \hat{S}_\alpha \stackrel{\text{п. н.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} \sum_{t=1}^n \hat{\xi}_t, \quad (12)$$

для которой при любых $I, J \subset N$ таких, что $|I| = |J| = m$ справедливо

$$\hat{v}_I = \hat{v}_J = \hat{v}_m, \quad (13)$$

при условии, что существует

$$\hat{v}_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{v}_m(n)}{C_n^m} < \infty.$$

Доказательство: Из леммы 2 и теоремы 1 получаем существование и стационарность в узком смысле последовательности $\hat{\gamma}_t \in \{-1, 1\}$, $t = 1, 2, \dots$ а также существование и эквивалентность сумм

$$S_\alpha(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{t=1}^n \gamma_t \text{ и } \hat{S}_\alpha(\hat{\gamma}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{t=1}^n \hat{\gamma}_t.$$

Откуда сразу следует существование и стационарность в узком смысле последовательности $\hat{\xi}_t$ и, учитывая что

$$\hat{S}_{n,\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{t=1}^n \hat{\xi}_t = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{t=1}^n \sum_{j=0}^{s-1} \hat{\gamma}_{t+n \cdot j} =$$

$$= \frac{1}{n^\alpha} \sum_{t=1}^{ns} \hat{\gamma}_t = s^\alpha \hat{S}_{ns,\alpha}(\hat{\gamma}),$$

получаем существование и эквивалентность сумм S_α и \hat{S}_α . Соотношение (13) непосредственно следует из соотношения (19) теоремы 3.2 [3]. \square

Рассмотрим последовательность действительных случайных величин $\xi_t \in \mathbf{R}$, $t = 1, 2, \dots$ с конечными математическими ожиданиями $\mathbf{M}\xi_t < \infty$, $\forall t \in N$ такую, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{M}\xi_t = \hat{h} < \infty. \quad (14)$$

Для её конечных подпоследовательностей $\xi_{t \in I_n}$ и $\xi_{t \in I_{n+1}}$ построим последовательности $\hat{\xi}_{t \in I_n}$ и $\hat{\xi}_{t \in I_{n+1}}$ удовлетворяющие условиям (23)-(26) теоремы 3.3 [3]. Степень согласованности вероятностных мер, определенных на $(\mathbf{R}_n, \mathfrak{B}_n)$ для $\hat{\xi}_{t \in I_n}$ и на $(\mathbf{R}_{n+1}, \mathfrak{B}_{n+1})$ для $\hat{\xi}_{t \in I_{n+1}}$ определяется аналогичным образом:

Лемма 3.

$$\mathbf{P}_n(\hat{\xi}_{t \in I_n} \in B) \leq \mathbf{P}_{n+1}(\hat{\xi}_{t \in I_{n+1}} \in B \times \mathbf{R}),$$

$$\forall B \in \mathfrak{B}_n. \quad (15)$$

Доказательство: Обозначим

$$\Delta x(k) = \left[\frac{2(k-1) - nm}{\sqrt{m}}, \frac{2k - nm}{\sqrt{m}} \right)$$

для

$$k = 1, \dots, nm - 1, \Delta x(0) = (-\infty, -n\sqrt{m}),$$

$$\Delta x(nm) = \left[n\sqrt{m} - \frac{2}{\sqrt{m}}, \infty \right).$$

Образуем последовательность случайных величин $\gamma_{m,t} \in X\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, m\right)$, $t = 1, 2, \dots, n$ с

$$\mathbf{P}(S_n(\gamma_m) = \sum_{t=1}^n \gamma_{m,t} = \frac{2k - nm}{\sqrt{m}}) =$$

$$= \mathbf{P}(S_n(\xi) \in \Delta x(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, nm.$$

По теореме 3.2 [4] существует последовательность случайных величин $\hat{\gamma}_{m,t \in I_n} \in X\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, m\right)$,

обладающая свойствами (13)-(17) [4]. Из определения случайных величин $\hat{\xi}_t$, данного в [3], следует что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\hat{\xi}_t \in (-\infty, x)) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\hat{\gamma}_{m,t} \in (-\infty, x)) = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\hat{\gamma}_{m,t} \in (-\infty, x) \cap X(\frac{1}{\sqrt{m}}, m)). \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(\hat{\xi}_{t \in I_n} \in B) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\hat{\gamma}_{m,t \in I_n} \in \\ &\in B \cap X_n(\frac{1}{\sqrt{m}}, m)) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n+1}(\hat{\xi}_{t \in I_{n+1}} \in B \times \mathbf{R}) &= \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\hat{\gamma}_{m,t \in I_{n+1}} \in (B \cap X_n(\frac{1}{\sqrt{m}}, m)) \times \\ &\times X(\frac{1}{\sqrt{m}}, m)). \end{aligned}$$

По лемме 2 для $\hat{\gamma}_{m,t \in I_n}$ справедливо (10) $\forall m \in N$ и $B \cap X_n(\frac{1}{\sqrt{m}}, m)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \forall m \in N \quad \mathbf{P}_{n,\hat{\gamma}}(\hat{\gamma}_{m,t \in I_n} \in B_m) &\leq \\ \leq \mathbf{P}_{n+1,\hat{\gamma}}(\hat{\gamma}_{m,t \in I_{n+1}} \in B_m \times X(\frac{1}{\sqrt{m}}, m)), \\ \forall B_m \in X_n(\frac{1}{\sqrt{m}}, m). \end{aligned}$$

Отсюда, при переходе к пределу по $m \rightarrow \infty$ с учетом определения $\hat{\xi}_t$, получаем справедливость (15). \square

Теорема 3. Пусть задана последовательность $\xi_t \in \mathbf{R}$, $t = 1, 2, \dots$, удовлетворяющая условию (14). Для произвольного $\alpha \in (0, 1]$ обозначим через S_α случайную величину $S_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} \sum_{t=1}^n \xi_t$ заданную может быть на расширенной области \mathbf{R} . Тогда существует стационарная в узком смысле последовательность $\hat{\xi}_t \in \mathbf{R}$ с $\mathbf{M}\hat{\xi}_t = \hat{h}, \forall t = 1, 2, \dots$ такая, что:

$$\hat{S}_\alpha \stackrel{\text{п. н.}}{=} S_\alpha \quad \text{где } \hat{S}_\alpha \stackrel{\text{п. н.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} \sum_{t=1}^n \hat{\xi}_t, \quad (16)$$

для которой при любых $I, J \subset N$ таких, что $|I| = |J| = m$ справедливо

$$\hat{v}_I = \hat{v}_J = \hat{v}_m, \quad (17)$$

при условии, что существует

$$\hat{v}_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{v}_m(n)}{C_n^m} < \infty.$$

Доказательство: Существование предельной последовательности $\hat{\xi}_{t \in N}$ следует из леммы 3 и доказывается аналогично тому, как это сделано в теореме 1. Стационарность последовательности $\hat{\xi}_{t \in N}$ доказывается также аналогично тому, как это сделано в теореме 1. Для того, чтобы доказать (16), вспомним, что мы определили случайные величины $\hat{\xi}_t = \lim_{m \rightarrow \infty} \hat{\gamma}_{m,t \in N}$. В теореме 2 показано, что $\forall m \in N$ фиксированного $-S_\alpha(\gamma_m) \stackrel{\text{п. н.}}{=} S_\alpha(\hat{\gamma}_m)$ и для любых $I, J \subset N$ таких, что $|I| = |J| = l$ справедливо $\hat{v}_I = \hat{v}_J = \hat{v}_l$, при условии, что существует $\hat{v}_l < \infty$. Откуда при $m \rightarrow \infty$ получаем (16) и (17). \square

Замечание 1. Одной из особенностей последовательности $\hat{\xi}_t$, $t = 1, 2, \dots$ является тот факт, что её усреднённые смешанные моменты \hat{v}_m совпадают вследствие соотношений (4), (13), (17) с \hat{v}_{I_m} , то есть полностью определяются взаимозависимостью первых m случайных величин $\hat{\xi}_t$, $t = 1, 2, \dots, m$.

Замечание 2. Ещё одна особенность последовательности $\hat{\xi}_t$, $t = 1, 2, \dots$ заключается в том, что она, как стационарная в узком смысле последовательность, сходится почти наверное к $\hat{S}_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{t=1}^n \hat{\xi}_t$, в то время как исходная последовательность ξ_t не обязательно обладает этим свойством.

Рассмотрим действительный случайный процесс $\xi(t) \in (\mathbf{R}, \mathfrak{B})$ с $\mathbf{M}\xi(t) = h(t)$ и $t \in [0, T]$ такой, что $\frac{1}{T} \int_0^T h(t) dt = \hat{h} < \infty$ для которого будем предполагать, что почти наверное все траектории процесса интегрируемы, т.е. существует почти для всех траекторий $\omega \in \Omega_T$ функционал $\eta(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t, \omega) dt < \infty$, который является случайной величиной, определенной на пространстве траекторий (элементарных исходов) Ω_T .

Будем предполагать, что η имеет конечное математическое ожидание $\mathbf{M}\eta < \infty$. Тогда

Теорема 4. Пусть задан случайный процесс $\xi(t) \in (\mathbf{R}, \mathfrak{B})$ с $\mathbf{M}\xi(t) = h(t) < \infty$ и $t \in [0, T]$ такой, что почти всюду на $\omega \in \Omega_T$ определена случайная величина $\eta(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t, \omega) dt$, $\mathbf{M}\eta < \infty$. Тогда существует стационарный в узком смысле процесс $\hat{\xi}(t) \in (\mathbf{R}, \mathfrak{B})$, $\mathbf{M}\hat{\xi}(t) = \hat{h}$.

Причем, если его траектории также почти на-
верное интегрируемы, то

$$\eta(\omega) \stackrel{n.n.}{=} \hat{\eta}(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{\xi}(t, \omega) dt,$$

$$\mathbf{M}\eta(\omega) = \mathbf{M}\hat{\eta}(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{M}\xi(t) dt = \hat{h} \quad (18).$$

Доказательство: Рассмотрим процесс форми-
рования серий конечных последовательно-
стей $\xi_t \in (\mathbf{R}, \mathfrak{B})$ и $t \in I_n$, начиная с $n = 2$.
Для $n = 2$ положим $\xi_1 = \xi(0)$; $\xi_2 = \xi(T)$.
Для $n = 3$ положим $\xi_1 = \xi(0)$; $\xi_2 = \xi(T)$;
 $\xi_3 = \xi(\frac{T}{2})$.
Для $n = 4$ положим $\xi_1 = \xi(0)$; $\xi_2 = \xi(T)$;
 $\xi_3 = \xi(\frac{T}{2})$; $\xi_4 = \xi(\frac{T}{4})$.
Для $n = 5$ положим $\xi_1 = \xi(0)$; $\xi_2 = \xi(T)$;
 $\xi_3 = \xi(\frac{T}{2})$; $\xi_4 = \xi(\frac{T}{4})$; $\xi_5 = \xi(\frac{3T}{4})$
и так далее . . .

В общем случае $\xi_n = \xi(\frac{2k+1}{2^{n_0+1}}T)$, где n_0 - ха-
рактеристика $\log_2(n - 2)$ и $k = (n - 2) - 2^{n_0}$.

Обозначим множество $T_N = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, где T_n
- множество точек отрезка $[0, T]$, которые были
использованы для формирования конечной под-
последовательности ξ_t , $t = 1, \dots, n$. Очевидно,
что $T_n \subset T_{n+1}$, причем $T_{n+1} = T_n + \{\frac{2k+1}{2^{n_0+1}}T\}$, где
 n_0 - характеристика $\log_2(n - 1)$ и $k = (n - 1) - 2^{n_0}$.

Для каждой такой последовательности
можно построить последовательность
 $\hat{\xi}_t$, $t = 1, \dots, n$, удовлетворяющую условиям
(23) – (26) теоремы 3.3 [3]. Причем для получен-
ных таким образом конечных последовательно-
стей справедлива лемма 3. Тогда из

$$\mathbf{P}_n(\hat{\xi}_{t \in I_n} \in B) \leq \mathbf{P}_{n+1}(\hat{\xi}_{t \in I_{n+1}} \in B \times \mathbf{R}) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}_{n+2}(\hat{\xi}_{t \in I_{n+2}} \in B \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}) \leq \dots \quad \forall B \in \mathfrak{B}_n,$$

получаем существование вероятности
 $\mathbf{P}(\hat{\xi}_{t \in I_n} \in B_{n,N})$, где

$$B_{n,N} = B \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \subset \mathfrak{B}_N,$$

как предела монотонно неубывающей, ограни-
ченной сверху, последовательности.

Это позволяет, учитывая что

$$\mathfrak{J}(B_{n+1,N}) \subset \mathfrak{J}(B_{n,N}),$$

где $B_{n,N}$ - суть проекция произвольного $B \subset \mathfrak{B}_N$
на \mathfrak{B}_n , а $\mathfrak{J}(B_{n,N}) \subset \mathfrak{B}_N$ -цилиндрическое множе-
ство, построенное на этой проекции как на ос-

новании, продолжить вероятность \mathbf{P}_{ξ} на произ-
вольные множества используя представление

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}(B_{n,N}). \quad (19)$$

Таким образом показано существование по-
следовательности $\hat{\xi}_t$, $t = 1, 2, \dots$.

Построение случайного процесса

$$\hat{\xi}(t) \in (\mathbf{R}, \mathfrak{B}), \quad \mathbf{M}\hat{\xi}(t) = \hat{h}, \quad t \in [0, T].$$

Для того, чтобы доказать существование это-
го процесса, необходимо и достаточно показать
согласованность распределений произвольного
конечномерного семейства функций распределе-
ния. Для этого воспользуемся построенной по-
следовательностью $\hat{\xi}_r$. Тогда конечная подпослед-
овательность $\hat{\xi}_{r_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ последователь-
ности $\hat{\xi}_r$ удовлетворяет условиям согласованно-
сти и, так как значение произвольной конечно-
мерной функции распределения не зависит от
порядка перечисления значений случайных ве-
личин, она всегда может быть записана в поряд-
ке возрастания выбранных точек отрезка $[0, T]$,
а не в порядке возрастания номеров элементов
случайной последовательности, то есть

$$\mathbf{F}_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{F}_{t_1, t_2, \dots, t_n}(\hat{\xi}_{r_1} =$$

$$= \hat{\xi}(t_1) < x_1, \hat{\xi}_{r_2} = \hat{\xi}(t_2) < x_2, \dots, \hat{\xi}_{r_n} =$$

$$= \hat{\xi}(t_n) < x_n) = \mathbf{F}_{t_{i_1} < t_{i_2} < \dots < t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}).$$

Это справедливо для точек отрезка $[0, T]$,
в которых определена последовательность
 $\hat{\xi}_r$, $r = 1, 2, \dots$, то есть в точках множества T_N .
Это множество по построению является счет-
ным и всюду плотным на отрезке $[0, T]$. Поэтому
для произвольной точки $t \in [0, T]$, $t \notin T_N$, мож-
но построить последовательность $\hat{\xi}_{r_l}$, $l = 1, 2, \dots$
таким образом, что $\hat{\xi}_{r_l} = \hat{\xi}(t_l)$, где $t_l < t$ и
 $|t - t_l| = \min_{r_j \in I_l} |t - r_j|$. Тогда $\lim_{l \rightarrow \infty} t_l = t$, и конеч-
номерную функцию распределения определим как

$$\mathbf{F}_{t_{i_1} < t_{i_2} < \dots < t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) =$$

$$= \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{F}_{t_{i_1} < t_{i_2} < \dots < t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}),$$

причем будем полагать, без ограничения общно-
сти, что в остальных точках функция распреде-
ления определена. Из свойств функции распре-
деления этот предел существует. Таким образом
для произвольной конечной совокупности точек
отрезка $[0, T]$ построены конечномерные функ-
ции распределения, удовлетворяющие условию

согласованности. Тогда, на основании теоремы Колмогорова о продолжении меры [1], следует и существование самого случайного процесса $\hat{\xi}(t)$, $t \in [0; T]$.

Стационарность в узком смысле процесса $\hat{\xi}(t)$, $t \in [0; T]$ следует из стационарности последовательности $\hat{\xi}_{t \in T_{n_s}}$, которая в свою очередь сразу следует из теоремы 3.

Рассмотрим свойства определенного таким образом случайного процесса. Учитывая почти наверное интегрируемость траекторий обоих процессов и теорему (3), вычислим значения интегралов. Для этого удобно взять ту часть конечных подпоследовательностей $\{\xi_{t \in T_{n_s}}\}$ и $\{\hat{\xi}_{t \in T_{n_s}}\}$, где интервалы между точками равны, то есть $n_s = 2, 3, 5, \dots, 2^s + 1, \dots$, $s = 0, 1, \dots$ и $\Delta t = \frac{T}{n_s - 1}$. Тогда из теоремы (3) имеем, что

$$\lim_{n_s \rightarrow \infty} \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} \xi_{t_k} \stackrel{\text{п.н.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} \hat{\xi}_{t_k},$$

откуда в силу

$$\begin{aligned} & \lim_{n_s \rightarrow \infty} \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} \xi_{t_k} = \\ &= \lim_{n_s \rightarrow \infty} \frac{n_s - 1}{n_s} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{n_s} \xi_{t_k} \frac{T}{n_s - 1} = \\ &= \lim_{n_s \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{n_s} \xi_{t_k} \Delta t = \frac{1}{T} \int_0^T \xi_t(\omega) dt = \eta(\omega) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \lim_{n_s \rightarrow \infty} \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} \hat{\xi}_{t_k} = \\ &= \lim_{n_s \rightarrow \infty} \frac{n_s - 1}{n_s} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{n_s} \hat{\xi}_{t_k} \frac{T}{n_s - 1} = \\ &= \lim_{n_s \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{n_s} \hat{\xi}_{t_k} \Delta t = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{\xi}_t(\omega) dt = \hat{\eta}(\omega) \end{aligned}$$

получаем, что

$$\eta(\omega) \stackrel{\text{п.н.}}{=} \hat{\eta}(\omega)$$

и по теореме Фубини

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\eta(\omega) &= \mathbf{M}\hat{\eta}(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{M}\xi(t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{M}\hat{\xi}(t) dt = \hat{h}. \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

Аналогичный результат можно показать для случая, когда случайный процесс задан на $(-\infty; \infty)$ или $[0; \infty)$.

Библиографический список

1. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 640 с.
2. Чеботарёв С.В. О свойствах многочленов Кравчука // Вестник БГПУ, серия: естественные и точные науки. 2002. Вып. 2. С. 53-58.
3. Чеботарев С.В. Об эквивалентности конечных сумм случайных величин // Вестник БГПУ, серия: естественные и точные науки. 2004. Вып. 4. С. 108-116.
4. Чеботарева Г.А., Чеботарев С.В. О эквивалентности конечных сумм от функций случайных величин // Вестник БГПУ, серия: естественные и точные науки. 2005. вып. 5. С.54-58

К ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ИМЕЮЩИХ ПЛОСКИЕ ЛИНИИ КРИВИЗНЫ

В евклидовом пространстве E^3 изучаются поверхности, у которых линии кривизны плоские. Частным случаем таких поверхностей являются циклиды Дюпена — поверхности, линии кривизны которых есть окружности [1-7].

1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ.

Рассмотрим гладкую поверхность M в евклидовом пространстве E^3 .

Обозначим $F(M) — R$ - алгебру дифференцируемых на M функций, $T_s^q — F$ - модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (q, s) , $\chi(M)$ — алгебру Ли векторных полей на M , ∂ — дифференцирование и \langle, \rangle — скалярное произведение в E^3 .

Формулы Гаусса-Вейнгартена поверхности M имеют вид ([8], стр.36)

$$\begin{aligned} \partial_X Y &= \nabla_X Y + b(X, Y)n, \\ \partial_X n &= -AX, \end{aligned} \quad (1)$$

где $A \in T_1^1(M)$, $X, Y \in \chi(M)$, $b \in T_2^0(M)$, $b(X, Y) = g(AX, Y)$ — вторая фундаментальная форма A — оператор Вейнгартена, ∇ — связность Леви-Чивита метрики $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$.

Выполняются уравнения Гаусса-Кодацци

$$R(X, Y)Z = b(Y, Z)AX - b(X, Z)AY, \quad (2)$$

$$dA(X, Y) = 0,$$

где $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z$ тензор кривизны связности ∇ , $dA(X, Y) = \nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X, Y]$ - внешний дифференциал поля A в связности ∇ .

Обозначим через $X_i, (i = 1, 2)$ орты главных направлений, k_i — главные кривизны, причем полагаем $k_1 \neq k_2, k_1 k_2 \neq 0$. Тем самым мы исключаем сферу, плоскость, цилиндр и конус. Тогда $AX_i = k_i X_i$. Рассмотрим $dA(X_i, X_j) = 0, i \neq j$. Имеем

$$\begin{aligned} dA(X_i, X_j) &= \nabla_{X_i} AX_j - \nabla_{X_j} AX_i - A[X_i, X_j] = \\ &= (X_i k_j)X_j + k_j \nabla_{X_i} X_j - (X_j k_i)X_i - k_i \nabla_{X_j} X_i - \\ &- k_i (\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i)^i - k_j (\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i)^j = 0, \end{aligned}$$

где Z^j j -тая составляющая поля Z . Приравняв нулю различные составляющие, имеем

$$(\nabla_{X_i} X_j)^i = \frac{X_j k_i}{k_j - k_i} X_i, i \neq j. \quad (3)$$

Так как X_i орты, то $(\nabla_{X_i} X_j)^j = 0, i \neq j$. Таким образом,

$$\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ji} X_i, \Gamma_{ji} = \frac{X_j k_i}{k_j - k_i}, i \neq j. \quad (4)$$

Дифференцируя равенства $\langle X_i, X_j \rangle = 0$ вдоль X_i , получим

$$\nabla_{X_i} X_i = -\Gamma_{ji} X_j, i \neq j. \quad (5)$$

Рассмотрим уравнения Гаусса (2)

$$R(X_j, X_i)X_i = k_i k_j X_j,$$

используя (4), (5). Имеем

$$\begin{aligned} R(X_j, X_i)X_i &= \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_i - \\ &- \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_i - \nabla_{\nabla_{X_j} X_i} X_i + \\ &+ \nabla_{\nabla_{X_i} X_j} X_i = \nabla_{X_j} (-\Gamma_{ji} X_j) - \\ &- \nabla_{X_i} \Gamma_{ij} X_j - \Gamma_{ij} \nabla_{X_j} X_i + \Gamma_{ji} \nabla_{X_i} X_i = \\ &= -(X_j \Gamma_{ji})X_j - \Gamma_{ji} (-\Gamma_{ij} X_i) - (X_i \Gamma_{ij})X_j - \\ &- \Gamma_{ij} \Gamma_{ji} X_i - (\Gamma_{ij})^2 X_j - (\Gamma_{ji})^2 X_j = k_i k_j X_j. \end{aligned}$$

Откуда

$$X_j \Gamma_{ji} + X_i \Gamma_{ij} + (\Gamma_{ij})^2 + (\Gamma_{ji})^2 + k_i k_j = 0, i \neq j. \quad (6)$$

Потребуем, чтобы линии кривизны были плоские. Обозначим через f_i линию кривизны, соответствующую кривизне k_i . Определим соприкасающуюся плоскость π_i линии f_i . Имеем

$$\partial_{X_i} X_i = \nabla_{X_i} X_i + b(X_i, X_i)n = -\Gamma_{ji} X_j + k_i n, i \neq j,$$

$$\pi_i = \{X_i, -\Gamma_{ji} X_j + k_i n\}. \quad (7)$$

Нормаль N_i к плоскости π_i имеет вид

$$N_i = \Gamma_{ji} n + k_i X_j. \quad (8)$$

Нормаль N_i вдоль f_i постоянная, т.е. $\partial_{X_i} N_i \parallel N_i$. Имеем

$$\begin{aligned} \partial_{X_i} N_i &= (X_i \Gamma_{ji})n - \Gamma_{ji} k_i X_j + \\ &+ (X_i k_i)X_j + k_i (\Gamma_{ji} X_i + b(X_j, X_i)n) = \\ &= (X_i \Gamma_{ji})n + (X_i k_i)X_j, \\ \frac{X_i \Gamma_{ji}}{\Gamma_{ji}} &= \frac{X_i k_i}{k_i} = t_i, i \neq j. \end{aligned} \quad (9)$$

Применяем к равенству $X_i k_i = t_i k_i$ операцию скобки

$$\begin{aligned} [X_i, X_j]f &= X_i X_j f - X_j X_i f = \\ &= \nabla_{X_i} X_j f - \nabla_{X_j} X_i f, f \in F(M). \end{aligned}$$

Используем (4),(5)

$$\begin{aligned} X_j X_i k_i &= (X_j t_i) k_i + t_i \Gamma_{ji} (k_j - k_i), \\ X_i X_j k_i &= X_i (\Gamma_{ji} (k_j - k_i)) = (X_i \Gamma_{ji}) (k_j - k_i) + \\ &+ \Gamma_{ji} \Gamma_{ij} (k_i - k_j) - \Gamma_{ji} t_i k_i, \\ (\nabla_{X_j} X_i - \nabla_{X_i} X_j) k_i &= \Gamma_{ij} X_j k_i - \Gamma_{ji} X_i k_i = \\ &= \Gamma_{ij} \Gamma_{ji} (k_j - k_i) - \Gamma_{ji} t_i k_i. \end{aligned}$$

Откуда получим

$$X_j t_i + 2t_i \Gamma_{ji} = 0, i \neq j. \quad (10)$$

Рассмотрим линию кривизны f_i . Вектор кривизны $\partial_{X_i} X_i = \nu_i$ имеет вид

$$\nu_i = -\Gamma_{ji} X_j + k_i n. \quad (11)$$

Кривизна $\bar{k}_i = \sqrt{\Gamma_{ji}^2 + k_i^2}$ кривой f_i в силу (9) удовлетворяет равенству

$$X_i (\ln \bar{k}_i) = t_i. \quad (12)$$

Откуда вытекает

Теорема 1. Следующие утверждения эквивалентны

- 1) $t_i = 0, i = 1, 2,$
- 2) линии кривизны f_i — окружности.

В этой случае поверхность M есть циклида Дюпена [1]-[7].

Обозначим через r радиус-вектор точки $m \in M, F_j = r + \frac{1}{k_j} n$. Когда $m \in f_i$ фокус F_j опишет линию F_j^i .

Так как $\partial_i F_j = \frac{k_i - k_i}{k_j^2} (k_j X_i + \Gamma_{ij} n)$, то в силу (8), вытекает

Теорема 2. Касательная к линии F_j^i ортогональна плоскости π_j , содержащей линию кривизны f_j .

Лемма 1. Имеет место формула

$$\begin{aligned} X_i X_i \Gamma_{ij} + \Gamma_{ij} (\Gamma_{ij}^2 + \Gamma_{ji}^2 + 3X_i \Gamma_{ij} + k_i^2) - \\ - t_i (X_i \Gamma_{ij} + \Gamma_{ij}^2) = 0, i \neq j. \end{aligned} \quad (13)$$

Доказательство. Дифференцируем (6) вдоль X_i . Имеем, используя (4),(9):

$$\begin{aligned} X_i X_i \Gamma_{ij} + X_i X_j \Gamma_{ji} + 2\Gamma_{ij} X_i \Gamma_{ij} + \\ + 2\Gamma_{ji} X_i \Gamma_{ji} + (X_i k_i) k_j + k_i X_i k_j = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = X_i X_i \Gamma_{ij} + X_i X_j \Gamma_{ji} + 2\Gamma_{ij} X_i \Gamma_{ij} + \\ + 2\Gamma_{ji}^2 t_i + t_i k_i k_j + k_i \Gamma_{ij} (k_i - k_j) = 0. \end{aligned}$$

Используя операцию скобки и формулу (9), получим

$$\begin{aligned} X_i X_j \Gamma_{ji} &= X_j X_i \Gamma_{ji} + \Gamma_{ji} X_i \Gamma_{ji} - \Gamma_{ij} X_j \Gamma_{ji} = \\ &= X_j (t_i \Gamma_{ji}) + \Gamma_{ji}^2 t_i - \Gamma_{ij} X_j \Gamma_{ji}. \end{aligned}$$

Используя (10), дифференцируем

$$X_j (t_i \Gamma_{ji}) = (X_j t_i) \Gamma_{ji} + t_i X_j \Gamma_{ji} = -2t_i \Gamma_{ji}^2 + t_i X_j \Gamma_{ji}.$$

В итоге, еще раз используя (6), получим (13).

Исследуем линию F_j^i , описываемую фокусом F_j при движении $m \in M$ вдоль f_i . Рассмотрим касательный вектор

$$l_j^i = k_j X_i + \Gamma_{ij} n$$

к F_j^i . Замечаем, что $l_j^i = N_j$, т.е. совпадает с нормалью к плоскости π_j , содержащей линию кривизны $f_j, i \neq j$.

Теорема 3. Линия F_j^i плоская.

Доказательство. Определим соприкасающуюся плоскость Π_j^i , определяемую векторами $l_j^i, \partial_i l_j^i = X_i l_j^i$, и покажем, что она постоянная вдоль X_i . Имеем

$$\begin{aligned} \partial_{X_i} l_j^i &= (X_i k_j) X_i + k_j (\nabla_{X_i} X_i + k_i n) + (X_i \Gamma_{ij}) n - \\ &- \Gamma_{ij} k_i X_i = \Gamma_{ij} (k_i - k_j) X_i + k_j (-\Gamma_{ji} X_j + k_i n) + \\ &+ (X_i \Gamma_{ij}) n - \Gamma_{ij} k_i X_i = -\Gamma_{ij} k_j X_i - \Gamma_{ji} k_j X_j + \\ &+ (k_i k_j + X_i \Gamma_{ij}) n = \frac{X_i \Gamma_{ij}}{\Gamma_{ij}^2} l_j^i + k_j T_j^i, \end{aligned}$$

где

$$T_j^i = -\left(\frac{X_i \Gamma_{ij}}{\Gamma_{ij}} + \Gamma_{ij}\right) X_i - \Gamma_{ji} X_j + k_i n. \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \partial_{X_i} T_j^i &= -\left\{ \frac{(X_i X_i \Gamma_{ij}) \Gamma_{ij} - (X_i \Gamma_{ij})^2}{\Gamma_{ij}^2} + \right. \\ &+ X_i \Gamma_{ij} \left. \right\} X_i - \left(\frac{X_i \Gamma_{ij}}{\Gamma_{ij}} + \Gamma_{ij} \right) (-\Gamma_{ji} X_j + k_i n) - \\ &- (X_i \Gamma_{ji}) X_j - \Gamma_{ji}^2 X_i + (X_i k_i) n - k_i^2 X_i = \\ &= \left\{ -\frac{\Gamma_{ij} X_i X_i \Gamma_{ij} - (X_i \Gamma_{ij})^2}{\Gamma_{ij}^2} - X_i \Gamma_{ij} - \Gamma_{ji}^2 - \right. \\ &- k_i^2 \left. \right\} X_i + \left\{ \left(\frac{X_i \Gamma_{ij}}{\Gamma_{ij}} + \Gamma_{ij} \right) \Gamma_{ji} - X_i \Gamma_{ji} \right\} X_j + \\ &+ \left\{ -\left(\frac{X_i \Gamma_{ik}}{\Gamma_{ij}} + \Gamma_{ij} \right) k_i + X_i k_i \right\} n. \end{aligned}$$

Используем (9),(13). Получим

$$\partial_{X_i} T_j^i = -\left(\frac{X_i \Gamma_{ij}}{\Gamma_{ij}} - t_i\right) T_j^i. \quad (15)$$

Таким образом, $\partial_{X_i} l_j^i, \partial_{X_i} T_j^i \in \Pi_j^i$. Кривая F_j^i принадлежит плоскости

$$\Pi_j^i = \{l_j^i, T_j^i\}. \quad (16)$$

Следствие 1. $T_j^i, T_i^j, i \neq j$ ортогональны.

Доказательство. $\langle T_i^j, T_j^i \rangle = 0, i \neq j$ и силу (6).

Следствие 2. Плоскости $\Pi_i^j, \Pi_j^i, i \neq j$ ортогональны.

Доказательство. Определим нормаль $N_j^i = [l_j^i, T_j^i]$ к плоскости Π_j^i . Имеем

$$N_j^i = \Gamma_{ij} \Gamma_{ji} X_i - (X_i \Gamma_{ij} + \Gamma_{ij}^2 + k_i k_j) X_j - k_j \Gamma_{ji} n. \quad (17)$$

$\langle N_j^i, N_i^j \rangle = 0, i \neq j$ в силу (6).

Следствие 3. Плоскость Π_j^i , содержащая фокальную кривую F_j^i и плоскость π_i , содержащая линию кривизны f_i , пересекаются по прямой, параллельной T_j^i .

Доказательство. Из (11) и (14) следует

$$T_j^i = -\left(\frac{X_i \Gamma_{ij}}{\Gamma_{ij}} + \Gamma_{ij}\right) X_i + \nu_i,$$

где ν_i — вектор кривизны кривой f_i . Так как $X_i, \nu_i \in \pi_i$, то и $T_j^i \in \pi_i$.

На касательной прямой к линии кривизны f_i рассмотрим точку

$$P_i = r - \frac{1}{\Gamma_{ij}} X_i. \quad (18)$$

Когда точка $m(r) \in f_i$ описывает линию кривизны f_i . Точка P_i опишет линию P_i^i .

Следствие 4. Линия P_i^i — прямая, параллельная T_j^i .

Доказательство.

$$\partial_{X_i} P_i = X_i + \frac{X_i \Gamma_{ij}}{\Gamma_{ij}^2} X_i -$$

$$\frac{1}{\Gamma_{ij}} (\nabla_{X_i} X_i + k_i n) = -\frac{1}{\Gamma_{ij}} T_j^i, \partial_{X_i} T_j^i \parallel T_j^i.$$

Следствие 5. Если поверхность M есть циклида Дюпена, то кривая F_j^i есть коническое сечение, а прямая P_i^i параллельная директрисе кривой F_j^i .

Доказательство. Если поверхность M есть циклида Дюпена, то [1]-[7] $X_i k_i = 0$, фокус F_i постоянный вдоль линии кривизны f_i , которая есть окружность. Следовательно, нормали к поверхности M вдоль f_i образуют конус, плоская кривая F_j^i есть коническое сечение, а прямая P_i^i пересечения плоскости конического сечения и плоскости основания конуса параллельна директрисе конического сечения [7, стр.36].

Библиографический список

1. Pinkal U. Dupinsche hyperflachen in E^4 .// Manuscripta math.,1985. 51, P.89-119.
2. Cecil T.E.,Ryan P.J.Conformal geometri and cyclides Dupin.// Can.J. Math.,1980, 32, N4, P.767-782.
3. Вяльяс М.Э., Лумисте Ю.Г. Изотермические гиперповерхности и трехмерные гиперциклиды Дюпена-Маннгейма.// Мат.заметки.1987,т.41, N5.С.731-740.
4. Лумисте Ю.Г. Конструкция Кэли-Каталана для некоторых гиперповерхностей Дюпена. //Уч.зап. Тартусского ун-та.1986. С.36-49.
5. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия.М.:ГИФМЛ ,1963. 540с. М.: Наука,1981, т.2.414 с.
6. Чешкова М.А. К геометрии дважды каналовой гиперповерхности в евклидовом пространстве E^n .// Математические труды. 2003, т.6, N1.С.169-181.
7. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М. Наука. 1981.344с.
8. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука,1981. Т.2.414 с.

ТОПОЛОГИЯ ЛОКАЛЬНО МИНИМАЛЬНЫХ СЕТЕЙ НАТЯНУТЫХ НА ВЫПУКЛУЮ ПЯТИУГОЛЬНУЮ ГРАНИЦУ

Актуальность проблемы Штейнера доказывает уже одним тем фактом, что уже на протяжении более чем 200 лет интерес к ней не ослабевает, и что не маловажно не только у математиков. Ведь проблема поиска кратчайшей сети затягивающей n неподвижных данных точек находит применение в самых различных областях науки и техники (более подробно [1,2,3,4]).

И хотя сейчас уже предложено несколько алгоритмов позволяющих найти локально минимальное дерево, затягивающее данные точки, например автором в предыдущих работах, был описан эффективный полиномиальный алгоритм позволяющий уменьшить длину ЕМОД более чем на 3%. Но, тем не менее, в общем случае проблема Штейнера осталась пока не решенной. И одна из причин этого, большое количество различных топологий возможных локально минимальных сетей, которые возможно натянуть на данные n неподвижных точек. В данной работе, автор опишет возможное топологическое устройство сетей натянутых на выпуклую границу состоящую из 5 точек.

Ранее подобной проблемой (описание возможных топологий) занимались профессора МГУ А.О. Иванов, А.А. Тужилин, в своих статьях они описали структуру экстремальных сетей натянутых на правильные 5 - 6 угольники.

В этой работе автор предлагает иной подход к изучению структуры сетей, который позволяет получить более общие результаты, для выпуклых многоугольников (не ограничивается только правильными и квазиправильными многоугольниками).

Прежде всего, введем необходимые определения:

Вершину будем называть граничной или внешней, если она принадлежит границе ДШ.

Ребро, соединяющее две граничные вершины, назовем граничным (внешним).

Деревом Штейнера с границей (ДШГ) будем называть граф, полученный в результате объединения Дерева Штейнера (ДШ) и многоугольника натянутого на граничные вершины ДШ (под многоугольником в данном случае понимается ограничивающая его ломаная). Очевидно, что эта операция обратима, в итоге обратной операции мы из ДШГ получим ДШ, бо-

лее того отображение ставящее ДШГ в соответствие ДШГ- является взаимно однозначным соответствием. Причем условие, что при удалении внешних вершин из графа, граф превращается в ДШ - является необходимым достаточным признаком, того что граф является ДШГ. Далее в этой работе мы будем рассматривать ДШГ, понимая что если из него удалить внешние ребра мы получим ДШ.

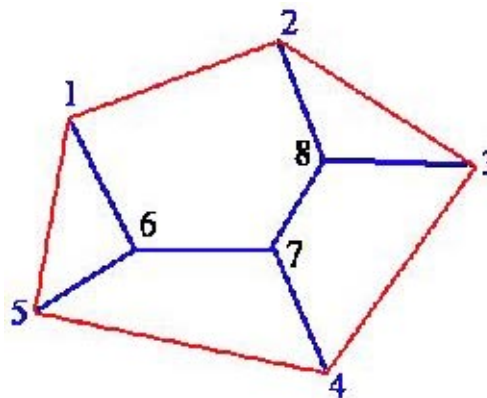


Рис. 1

1. Как видно ДШГ это граф, все степени вершин которого равны 3 (для подвижных точек, по свойствам ДШ, а так как граничный многоугольник - замкнут, то в каждой граничной точке сходится две граничных (внешних) ребра и одна внутреннее, то есть степень равна 3).

2. В ДШГ каждая грань, кроме внешней, имеет ровно одно внешнее ребро. Иначе, если не имеет ни одного внешнего ребра, то эта грань породит цикл при преобразовании ДШГ в ДШ, а так как ДШ - дерево, то оно не содержит циклов, получили противоречие. В случае если грань имеет более одного внешнего ребра, тогда при преобразовании ДШГ в ДШ, эта грань распадается на две компоненты, причем эти компоненты не могут быть связаны в силу выпуклости граничного многоугольника.

3. Из предыдущего следует, что любая грань содержит ровно 2 граничных точки.

4. В каждой граничной точке сходятся ровно 2 внешних ребра и одно внутреннее, иначе: если предположить что граничной вершине инцидентно только одно внешнее ребро, то получаем

что граничный многоугольник не замкнут что невозможно, если ни одного ребра, то очевидно такая вершина не будет являться внешней, и случай когда вершине инцидентно 3 граничных ребра невозможен в силу того, что граничный многоугольник выпуклый.

Данная работа посвящена изучению топологии невырожденного ДШ натянутого на выпуклую 5 угольную границу. В силу невырожденности ДШ, из [2] известно, что количество внутренних точек на 2 меньше чем количество внешних неподвижных, точек и равно 3. Из (3) следует, что грани в таком ДШГ не могут содержать более 3 внутренних точек, то есть возможны лишь 3, 4 и 5 угольные грани.

Далее воспользуемся теоремой Эйлера и свойством, что степень всех вершин равна 3, составим систему уравнений неизвестными в которой будут количества треугольных (Г3), четырехугольных (Г4) и пятиугольных (Г5) граней. Получаем:

$$Г3+Г4+Г5=5$$

$$3Г3+4Г4+5Г5=19$$

Получим следующие зависимости:

$$Г4= 6-2Г3$$

$$Г5=Г3-1$$

Для удобства по решению системы составим таблицу количества граней:

Г3	1	2	3
Г4	4	2	0
Г5	0	1	2

Мы получили 3 различных набора, удалим из рассмотрения заведомо не возможные.

1. Например из набора Г4=4, Г3=1, Г5=0 невозможно составить ни одного ДШГ, докажем этот факт. Для этого рассмотрим возможные склейки четырехугольных граней, для удобства будем их тоже обозначать Г4, помня что так же мы обозначаем и количество граней.

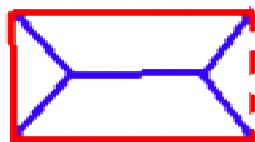


Рис. 2

Случай когда 2 Г4 имеют две общие подвижные точки возможен только в четырехугольнике, на рис. 2 изображен этот случай.

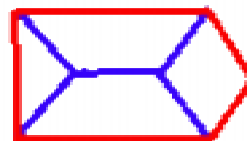


Рис. 3

Действительно пусть 2 Г4 склеены таким образом, попытаемся заменить любую из Г3 (например правую, очевидно при этом мы не теряем общности) каким то другим видом грани, если вместо нее вставить Г4 (рис. 3), в силу того что степени граничных вершин равны 3, и приняв факт что в любой граничной вершине пересекаются два внешних ребра, то очевидно получаем что вставленная Г4 имеет более 1 внешнего ребра, что невозможно, аналогичные рассуждения можно провести и для любого другого вида граней, следовательно, такая склейка Г4 возможна лишь в 4 угольной границе.

Другой случай (рис. 4) - когда Г4 имеют лишь по одной общей точке, в этом случае для размещения уже 3 Г4 необходимо 4 подвижных точки, а по условию их не более 3, то есть и такое расположение не возможно.

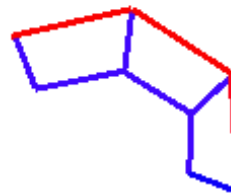


Рис. 4

Видим что из этого набора нельзя составить ни одного ДШГ.

Далее рассмотрим комбинацию, 3 - Г3, и 2 - Г5.

Любая Г5 требует 3 подвижные точки, при склейке двух Г5 необходимо в лучшем случае 4 подвижных точки (рис. 5), а по условию их лишь 3, таким образом, и эта комбинация не выполнима.

Итак, два претендента мы уже отбросили, остался один.

Из комбинации 2 - Г3, 2 - Г4, 1 - Г5, по крайней мере, 1 топологию мы можем задать, она изображена на рис. 1. Посчитаем сколько всего различных топологий можно задать из этого набора граней.

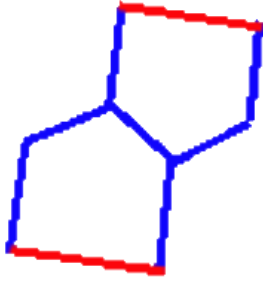


Рис. 5

Первая оценка количества топологий. Посчитаем общее количество комбинаций которые можно составить если количество $\Gamma_3=2, \Gamma_4=2, \Gamma_5=1$, причем комбинации получаемые при циклической перестановке очевидно образуют одну и ту же топологию. Тогда количество топологий (Т):

$$T = \frac{(\Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5)!}{(2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot (\Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5))} = \frac{5!}{(2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 5)} = 3! = 6$$

Итак, мы получили грубую оценку количества различных топологий, для её уточнения найдем недопустимые сочетания граней.

Заметим что, топологию можно закодировать, выписав в строчку грани, которые мы встречаем при обходе границы против часовой стрелки, причем неважно с какой из граничных вершин мы начнем обход, такую последовательность будем далее называть кодом ДШ или (в силу взаимнооднозначного соответствия между ДШ и ДШГ) кодом ДШГ. Очевидно что код представляет собой топологию, задающую изоморфные сети, которые могут быть получены друг из друга поворотами. Например код топологии изображенной на рис.1 можно записать следующим образом $\Gamma_5, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_4, \Gamma_3$. Далее для удобства, сочетания граней будем представлять кусками кода, например сочетание изображенное на рис.4 можно записать как $\dots \Gamma_4, \Gamma_4, \Gamma_4 \dots$

Перечислим невозможные (запрещенные) сочетания граней:

1. $\dots \Gamma_3, \Gamma_3 \dots$ – (рис 6) если граф содержит такое сочетание, то он не может являться ДШГ, так как если убрать границу, получим более одной связной компоненты, что не возможно в силу связности ДШ. Существует 3 различные топологии содержащих это запрещенное сочетание ($\Gamma_5, \Gamma_4, \Gamma_4, \Gamma_3, \Gamma_3; \Gamma_5, \Gamma_4, \Gamma_3, \Gamma_3, \Gamma_4; \Gamma_5, \Gamma_3, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_4$) которые в свою очередь тоже невозможны, следовательно число возможных различных топологий уменьшается на 3. $6-3=3$.

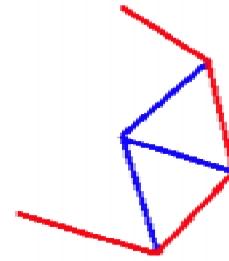


Рис. 6

2. $\dots \Gamma_4, \Gamma_3, \Gamma_4 \dots$ - такое сочетание возможно лишь в ДШ натянутом на 4 угольник, потому что если 4 угольные грани не имеют общего ребра, то степень вершины общё для этих граней будет равна 4, что недопустимо, а если Γ_4 имеют общее ребро, то во второй их общей подвижной вершине никакой грани кроме Γ_3 вставить нельзя, иначе получим граф не являющийся ДШГ, видим что мы получаем топологию четырехугольной границы, а по условию нас интересует 5 угольная граница. Таким образом, получаем ещё 2 недопустимых топологии ($\Gamma_5, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_3, \Gamma_4; \Gamma_5, \Gamma_4, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_3$), тем самым уменьшив количество различных топологий возможных для 5 угольной границы до одной ($6-3-2=1$).

Таким образом, мы показали, что 5 угольная граница допускает лишь одну топологию.

Ранее в [1], было показано, что "...Невырожденных локально минимальных сетей, затягивающих типичную границу, состоящую из 5 точек, может быть не более 8. ...", как видно из вышесказанного, таких сетей может быть не более 5, так как топология одна, и сети могут быть получены с помощью поворотов или циклических перестановок кода, что в принципе одно и то же, количество таких перестановок равно 5, то есть получаем что различных сетей будет 5. Следовательно, возможных локально минимальных сетей на выпуклой пятиугольной границе не более 5.

Таким образом, мы показали что всего возможно не более 5 сетей, причем мы легко можем описать их структуру, а зная структуру, приняв подвижные точки за переменные, можно составить систему уравнений для каждой сети и решив её найти координаты точек. То есть составив и решив для всех сетей системы мы получим уже деревья Штейнера выбрав из которых кратчайшее получим абсолютное ДШ.

В работе показано, что количество локально минимальных сетей на выпуклой 5 угольной границе может быть не более 5. Причем гораздо важнее по мнению автора, это предложенный метод. Проведя практически аналогичные

исследования легко можно получить такое ограничение на количество локально минимальных сетей и для 6 угольной границы, необходимо учесть лишь тот факт, что 6 угольная граница допускает уже не более одной 6 угольной грани.

Минус же данного метода в том что, при рассмотрении границ с большим количеством вер-

шин, мы сталкиваемся с большим количеством вариантов комбинаций и порой крайне сложно определить, допустима ли комбинация или нет. В последующих работах автор попытается изучить топологии для границ с большим количеством вершин.

Библиографический список

1. Г.А.Карпунин. Аналог теории Морса для плоских линейных сетей и обобщенная проблема Штейнера // Математический сборник 2000. Т. 191, №2. С. 64 -90.
2. А.О. Иванов, А.А. Тужилин. Классификация минимальных скелетов с правильной границей // Успехи математических наук. 1996. Июль-август т. 51, вып.4(310)
3. А.А. Тужилин. Минимальные бинарные деревья с правильной границей: случай скелетов с пятью концами // Математические заметки. 1997. том 61 вып. 6. июнь.
4. Р.Курант, Г.Робинс.Что такое математика? // М.: МЦНМО, 2000.

ФИЗИКА

УДК 678.011: 678.067: 620.193.21

Е.С. Ананьева, А.Д. Насонов, В.Б. Маркин
**ВОЗМОЖНОСТЬ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ
 ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ ПОЛИМЕРНОГО
 КОМПОЗИТА С КОМБИНИРОВАННЫМ
 НАПОЛНИТЕЛЕМ**

Практика создания и использования ПКМ активно стимулирует решения главной проблемы механики неоднородных сред - установление количественных соотношений между микроструктурой композита и его механическими свойствами. Однако классическая в своей постановке задача далека от завершения, и является весьма актуальной. Это обусловлено многообразием ПКМ, различающимися качественными и количественными параметрами, а также математическими трудностями.

Анализ физико-химических основ наполнения полимерных материалов [1,2], указывает на то, что характеристики композитов с дисперсно-волоконистым наполнителем занимают промежуточное положение между данными для двухкомпонентных материалов. Числовые значения этих характеристик снизу ограничиваются свойствам не наполненной полимерной матрицы, а сверху свойствами основного волокнистого наполнителя.

Существование нескольких расчетных моделей [3-5] ставит перед исследователями задачу выбора наиболее корректной, для описания композиционного материала с заданной структурой. Поскольку жесткости составляющих композитных материалов сильно различаются, значения эффективных характеристик неоднородных материалов можно оценить только неравенствами.

Одним из фундаментальных методов механики композитов является вариационный метод Хашина-Штрикмана, который без структурных ограничений позволяет оценить верхнюю и нижнюю границу упругих характеристик. Решения были получены при рассмотрении деформации упругого сферического включения, окруженного слоем матрицы, в бесконечной изотропной среде. Принимая гипотезу кусочно-однородного напряженно-деформированного состояния, для двухкомпонентной изотропной среды получены соотношения [6,7] для оценки сдвигового G_c модуля материала.

$$G_1 + \frac{V_2(G_2 - G_1)}{1 + V_1Q_1(G_2 - G_1)} \leq G_c \leq$$

$$\leq G + \frac{V_1(G_1 - G_2)}{1 + V_2Q_2(G_1 - G_2)} \quad (1)$$

где $i = 1, 2$ - индексы фаз (1 - соответствует материалу матрицы, 2 - материалу наполнителя);

V_i - объемное содержание фаз;

G_i - сдвиговый модуль фаз;

$Q_i = \frac{6(K_i + 2G_i)}{5G_i(3K_i + 4G_i)}$;

K_i - объемный модуль фаз.

Если модуль упругости включения значительно превосходит модуль матрицы, и частицы наполнителя изолированы друг от друга, что соответствует нашим системам, можно применять следующее решение

$$G_c = G_m + \frac{V_2(G_f - G_m)}{1 + (1 - V_2)(G_f - G_m) \frac{6(K_m + 2G_m)}{5G_m(3K_m + 4G_m)}}, \quad (2)$$

где индекс c - соответствует композиционному материалу, f - непрерывному наполнителю, m - материалу матрицы.

Приближенное решение в области малых концентраций ($V_2 \rightarrow 0$) представляет собой линейаризованное соотношение (2). Это соотношение аналогично решениям для модели среды с малой объемной долей сферических включений (единичное включение, внедренное в бесконечную матрицу).

$$\frac{G_c}{G_m} = 1 + \frac{15(1 - v_m)(G - G)V_2}{(7 - 5v_m)G_m + 2(4 - 5v_m)G}, \quad (3)$$

где v_m - коэффициент Пуассона матрицы.

На основании принципа мультипликативности [8], расчет упругих характеристик композита с комбинированным наполнителем рекомендуется проводить в два этапа. На первом этапе вычисляем характеристики материала, представляющего собой матрицу с равномерно распределенным дисперсным наполнителем. Затем, принимаем за однородную матрицу, данную систему и рассчитываем свойства композита на основе непрерывных волокон.

Известно, что механизм упрочнения зависит от размера частиц и их расположения в пространстве. Учет этих факторов ограничивается

в предложенных моделях введением в неравенства величины, характеризующей степень наполнения. Для того чтобы исключить возможные неточности в определении модуля сдвига по модели Хашина-Штрикмана, связанные с учетом свойств слоев, сформированных под влиянием поверхности наполнителя воспользуемся моделью, предложенной Г.А. Луцкейкин [9]. Согласно этой модели наполненный полимер состоит из двух частей - "усиленной", состоящей из частиц наполнителя с сорбированным полимером, и несорбированного полимера.

$$G_c = V_y G_y + (1 - V_y) G_m, \quad (4)$$

где V_y - объемное содержание усиленной части, от. ед.;

G_y - сдвиговой модуль упругости усиленной части, ГПа;

G_m - сдвиговой модуль упругости ненаполненного полимера, ГПа.

При этом сдвиговой модуль упругости сорбированного полимера G_y в $\epsilon - 1$ раз выше сдвигового модуля упругости несорбированного полимера G_m , где ϵ - диэлектрическая проницаемость полимера. В нашем случае полимер наполнен частицами, форма и геометрические размеры которых нам известны. Представим объем усиленной части, в следующем виде.

$$V_y = V_n + V_{ym}, \quad (5)$$

где V_n - объемное содержание наполнителя, от. ед.; V_{ym} - объем, занимаемый сорбируемым полимером, от. ед.

Объем занимаемый сорбируемым полимером

$$V_{ym} = S_V \cdot h, \quad (6)$$

где S_V - поверхность частицы отнесенная к единице объема, $\text{м}^2/\text{м}^3$;

h - толщина сорбированного полимера, м.

В частности:

для сферических частиц

$$S_V \approx \frac{6}{D} \quad (7)$$

для чешуек

$$S_V \approx \frac{2}{h_1}, \quad (8)$$

где h_1 - толщина чешуйки.

Из технических характеристик порошковых наполнителей, применяемых для модификации эпоксидного полимера, известны значения удельной поверхности и плотности наполнителей, тогда

$$S_V = S_{yд} \cdot \rho, \quad (9)$$

где $S_{yд}$ - удельная площадь поверхности, $\text{м}^2/\text{г}$;
 ρ - плотность, $\text{г}/\text{м}^3$.

Рассчитаем, какова толщина сорбированного слоя полимера h при определенном содержании наполнителя. Сначала найдем число частиц в 1 м^3 смеси

$$N = \frac{V_n}{V_p} \quad (10)$$

где V_p - объем одной частицы, в случае сферических частиц $V_p = 4/3\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3$. Для чешуек $V_p = a^2 t$.

В предположении, что поверхность частиц с сорбированным полимером занимает весь объем, поэтому

$$h = \frac{1}{N \cdot S_1}, \quad (11)$$

где S_1 - площадь поверхности одной частицы, м^2 , $S_1 = \pi D^2$.

Экспресс методом для прогнозирования модуля сдвига наполненного материала можно считать графический метод с применением формулы [10]

$$K = \frac{G_n}{G_m} \quad (12)$$

На рисунке 1 представлена графическая часть решения, зависимость K от объемного содержания наполнителя в "усиленной" фазе.

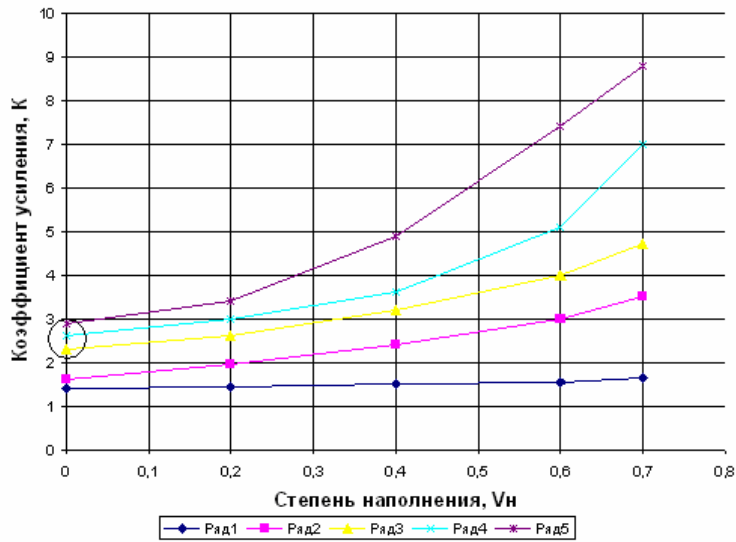


Рисунок 1 - зависимость коэффициента К от объемного содержания наполнителя при различном отношении G_n/G_m .

Ряд 1 - $G_n/G_m = 100$; Ряд 2 - $G_n/G_m = 25$; Ряд 3 - $G_n/G_m = 10$; Ряд 4 - $G_n/G_m = 5$; Ряд 5 - $G_n/G_m = 2$.

○ - область, соответствующая решению для систем с содержанием ультрадисперсного наполнителя $V \rightarrow 0$ и соотношением $\frac{G_n}{G_m} = 100$.

При степенях наполнения лежащих в пределах $0 \leq V_n \leq 0,01$ и отношении $G_n/G_m \approx 100$, коэффициент усиления К принимает значения от 2,8 до 3.

Для оценки возможности применения описанных выше моделей для прогнозирования упругих свойств полимеров наполненных дисперсными частицами различных размеров, мор-

фологии при степенях наполнения не превышающих 0,01 нами были исследованы образцы на основе эпоксидного связующего, наполненного ультрадисперсными частицами синтетического алмаза и частицами корунда.

Свойства наполнителей приведены в таблице 1.

Таблица 1

Основные характеристики порошкообразных наполнителей

Марка наполнителя	Внешний вид	Содержание основного вещества, %	Удельная площадь поверхности, m^2/g	Размер частиц, нм	Форма частиц
УДА-С*	Серый Порошок	Не менее 90	270	1-100	Сферическая
УДА-Г**	Черный порошок	Не менее 91	380	1-100	Сферическая
Корунд	Голубой порошок	99	2,5	4***	чешуйка

* порошок является полидисперсным, в нем присутствуют три уровня агрегации - 10-60 нм, 100 нм

** доля алмазной фазы по отношению к общему углероду - 45 - 55 %, плотность пикнометрическая УДА-С и УДА-Г составляет $3,3 \text{ г/см}^3$, порошки седиментационно устойчивы, скорость осаждения 0,6-0,9 мкм/мин

*** размер частиц приведен в микрометрах, порошок монофазен, плотность пикнометрическая составляет $3,6 \text{ г/см}^3$

В таблице 2 приведены результаты численного моделирования упругих характеристик (а именно модуля сдвига) образцов эпоксидного связующего наполненных дисперсным наполнителем.

Предложенный модельный подход позволяет получить простейшие аналитические зависимости упругих свойств матричных полимерных композитов, наполненных жесткими частицами от следующих структурных параметров: расстоя-

ния между центрами частиц и размерами частиц, которые в предложенных моделях учтены степенью наполнения, объемом усиленной фазы. Однако невозможно учесть реальное размещение элементов гетерогенной среды и условия на их поверхностях, взаимное влияние поверхностей. Эти трудности приводят к некоторому усреднению результатов при вычислении и к несоответствию с экспериментальными данными.

Таблица 2

Результаты численного моделирования и экспериментальных исследований упругих характеристик системы эпоксидное связующее + жесткие включения

Дисперсный наполнитель	Степень наполнения $V_0, \%$	Интервал значений модуля сдвига $G_1^*+G_2^*$	$G_1^*, \text{ ГПа}$	$G_2^{**}, \text{ ГПа}$	Экспериментальное значение модуля сдвига $G_1, \text{ ГПа}$
УДА-С	0,01	0,95 – 1,3	1,01	0,97	0,66
	0,05	0,95 – 1,3	1,07	0,95	0,51
	0,1	0,95 – 1,4	1,13	1,34	1,4
УДА-Г	0,01	0,95 – 1,52	1,01	0,97	0,66
	0,05	0,95 – 1,52	1,05	0,95	1,34
	0,1	0,95 – 1,6	1,09	1,34	1,65
Корунд	1	0,97 – 1,02	0,98	1,3	1,22
	5	1,05 – 1,3	1,12	1,6	1,41

* результаты, полученные по модели Хашина-Штрикмана

** результаты применения модели Луцейкина

Приведем графическую зависимость коэффициента усиления K от объемного содержания дисперсного наполнителя (рисунок 2).

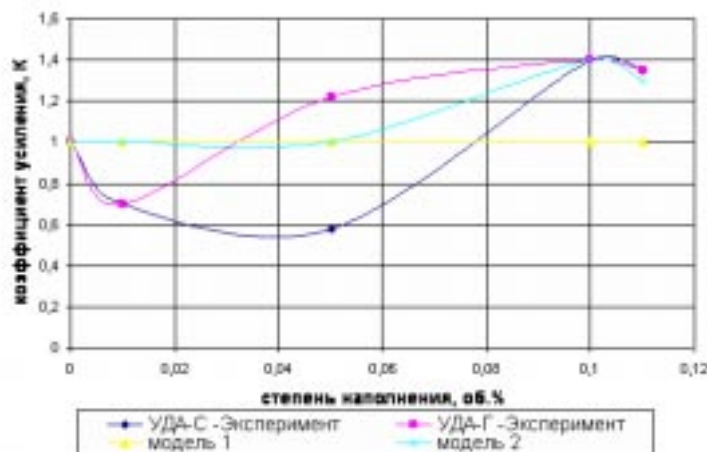


Рисунок 2 - Зависимость коэффициента усиления K от объемного содержания порошка ультрадисперсного алмаза

Анализ полученных данных показывает, что числовые значения, полученные экспериментальным путем в системах с УДА-С ($V_n = 0,1\%$), с УДА-Г ($V_n = 0,05$ и $0,01\%$), с корундом ($V_n = 5\%$), укладываются в область определения значений модуля сдвига, в так называемую ва-

риационную вилку Хашина-Штрикмана.

В то же время, в системах с УДА-С ($V_n = 0,01; 0,05\%$), УДА-Г ($V_n = 0,01\%$) экспериментальное значение модуля сдвига лежит ниже нижней границы модуля, а для корунда ($V_n = 5\%$) выше верхней границы.

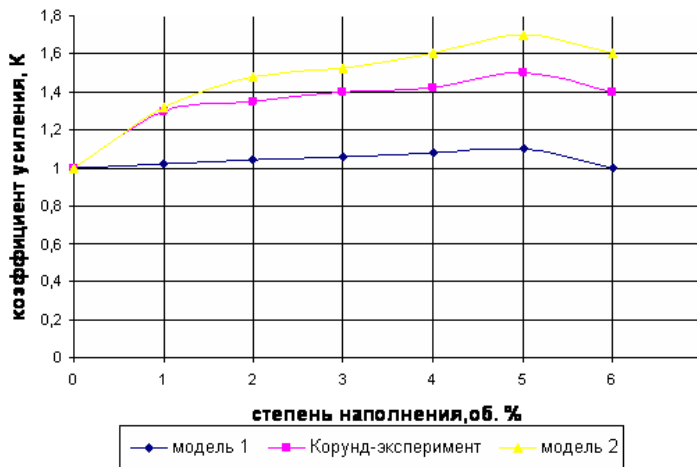


Рисунок 3 - Зависимость коэффициента усиления K от объемного содержания корунда

Большой схожимостью обладают данные, полученные по модели Лущейкина. Это хорошо прослеживается и на графической зависимости коэффициента усиления K от степени наполнения. На рисунке 2 отчетливо видно, что хорошая схожимость с теоретическим значением по II модели наблюдается при степени наполнения УДА-С и УДА-Г равной 0,1 об. %. При степени наполнения ультрадисперсными частицами 0,01 об. % данные эксперимента по системам с УДА-С и УДА-Г совпадают, но отличаются от прогнозируемых приблизительно на 30 %, в сторону уменьшения значения. И совсем необычен (относительно прогноза) ход кривых при степени наполнения 0,05 об. %. При этом для системы с УДА-Г отклонение от ожидаемого значения составляет 18 % в сторону увеличения, а для УДА-С на 45 % в сторону уменьшения.

Следовательно, данная степень наполнения представляет собой практический интерес для дальнейшего изучения. В этих системах природа дисперсного наполнителя отчетливо проявляет свое влияние на структуру полимера, которое приводит к непредсказуемым результатам.

Для систем, содержащих в качестве дисперсного наполнителя частицы корунда схожимость результатов эксперимента и теоретических расчетов по модели II хорошая, отклонение резуль-

татов не превышает 10 % (проявляется на степенях наполнения более 1 %).

Приведем аналогичные зависимости коэффициента ожидаемого усиления для образцов углепластика на основе эпоксидного связующего модифицированного ультрадисперсным синтетическим алмазным порошком (данный компонентный состав является оптимальным для улучшения вязко-упругих свойств углепластика). Для образцов углепластика экспериментальные данные для модуля сдвига лежат в пределах от 3 до 3,3 ГПа. Эти значения лежат в интервале допустимых значений, полученных расчетным путем, и близки к области нижней границы модуля.

На рисунке 4 представлена графическая зависимость коэффициента усиления K в образцах углепластика от содержания дисперсной фазы.

На представленной зависимости отчетливо проявилось расхождение в теоретически предсказанных результатах и экспериментальных значениях при содержании УДА-С 0,05 об. %. Это свидетельствует о том, что эффект от модификации связующего еще ярче проявился при комбинированном наполнении. Следовательно, данная степень наполнения требует дополнительных исследований для изучения возникающего синергетического эффекта.

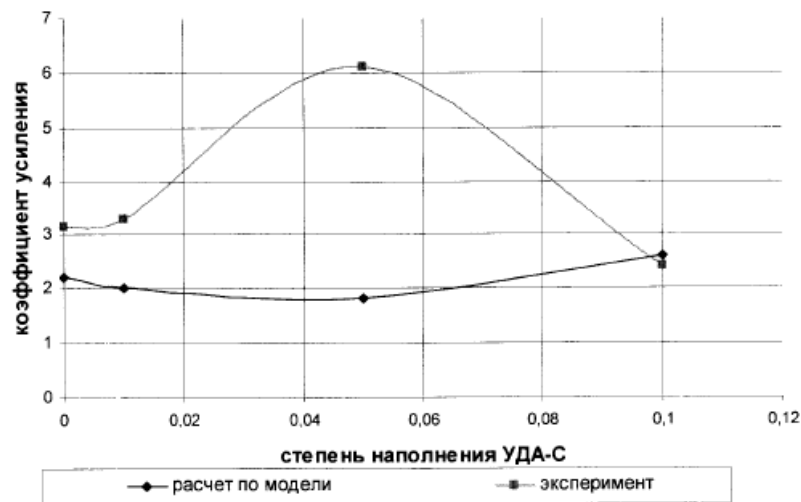


Рисунок 4 - Зависимость коэффициента усиления K от объемного содержания УДА-С

Результаты численного анализа прогнозируемых значений модуля сдвига полимерного связующего, модифицированного жесткими частицами и композита на его основе показали:

1. Модуль сдвига эпоксидного связующего модифицированного малым количеством ($V_n \rightarrow 0$) жесткого дисперсного наполнителя имеет определенные границы, снизу он ограничен значением модуля сдвига для эпоксидного полимера ($G_m = 0,95 \text{ ГПа}$), а сверху характеристиками наполнителя.

2. В области очень малых степеней наполнения численные значения верхней границы превышают нижнюю в 1,5-2 раза.

3. Среднее значение модуля сдвига варьируется в пределах от 0,98 до 1,12.

4. Расчетный коэффициент усиления лежит в пределах от 1 до 1,18.

5. Для композита на основе непрерывного

углеродного наполнителя с модифицированной матрицей модуль сдвига должен лежать в пределах от 0,97 до 5,2

6. Ожидаемый коэффициент усиления для материала с комбинированным наполнением не должен превышать 5,5.

Сравнение результатов экспериментальных исследований с результатами численного анализа показало, что для материалов с комбинированным наполнением (дисперсно-волоконистым), в которых размеры и степень наполнения дисперсной фазы не превышают 1 мкм и 0,01 соответственно, применение традиционных моделей затруднительно. Следовательно разработка математической модели для прогнозирования упругих характеристик материалов с комбинированным наполнителем является актуальной задачей для дальнейших исследований.

Библиографический список

1. Бобрышев А.Н., Козомазов В.Н., Авдеев Р.И., Саломашов В.И. Синергетика дисперсно - наполненных композитов. М.: ЦКТ МИИТа, 1999. 252 с.
2. Липатов Ю.С. Межфазные явления в полимерах. Киев: Наукова думка, 1980. 259 с.
3. Лурье С.А., Белов П.А. Математические модели механики сплошной среды и физических полей // Изд. ВЦ РАН, 2000. 151 с.
4. Германович Л.Н., Дыскин А.В. Вариальные разложения в задачах об эффективных характеристиках // Механика композитных материалов, 1994. Т. 30. №2. С. 222 - 237.
5. Згаевский В.Э., Яновский Ю.Г. Роль и значение физического модельного подхода в описании и предсказании эффективных физико-механических свойств и поведения гетерогенных полимерных сред // Механика композитных материалов и конструкций, 1995. Т. 1. №1. С. 19 - 53.
6. Жук А.В., Горенберг А.Я., Тополкараев В.А. Микродеформационное поведение дисперсно-наполненного композитного материала с упругопластичной матрицей // Механика композитных материалов. 1981. №2. С. 234 - 237.
7. Кочетков В.А. Расчет характеристик упругости многофазного композита, содержаще-

- го составные или полые сферические включения // *Механика композитных материалов*. 1994. №1. С. 19 - 53.
8. Луцейкин Г.А. Моделирование упругих и механических прочностных свойств наполненных полимеров и композитов // *Пласт. Массы*. 2003. № 1. С. 36 - 38.
9. Луцейкин Г.А. // *Пласт. Массы*. 2001. №5. С. 17 - 19.
10. Згаевский В.Э., Яновский Ю.Г. Вычисление эффективной вязкости концентрированных суспензий жестких частиц на основе кристаллической модели // *Механика композитных материалов и конструкций*. 1996. Т. 2. №1. С. 137 - 167.

ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛИМЕРОВ

Обычные органические полимеры, не подвергнутые обработке, представляют собой изоляторы. Особенность электрических свойств полимеров состоит в их очень низкой электропроводности, которая не превышает $10^{-14} \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{см}^{-1}$, в то время как проводимость металлов лежит в диапазоне $10^4 - 10^6 \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{см}^{-1}$.

Обширные исследования, собранные в работе [1], позволяют установить следующие электрофизические характеристики полимерных материалов:

а) удельное сопротивление лежит в широком диапазоне - от значений, характерных для полуметаллов ($10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{см}$), до значений, характерных для диэлектриков ($10^{13} \text{ Ом}\cdot\text{см}$);

б) температурный коэффициент сопротивления может быть положительным, отрицательным и, по крайней мере в определенном интервале, нулевым;

в) подвижность носителей тока лежит в диапазоне от очень малых значений до $100 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$;

г) термоэдс этих веществ может достигать нескольких сотен мкВ/К.

Долгое время считалось, что у органических веществ, которые могут кристаллизоваться в молекулярные решетки, не имеют истинной электронной проводимости, например, обусловленной термически возбужденными π -электронами, так как эти электроны прочно связаны на электронных орбитах. Однако, исследования последних десятилетий привели к возможности наделить полимеры такой же проводимостью, как и металлы. Этого удалось добиться, вводя в полимерное вещество различного рода проводящие добавки, такие как порошки алюминия, металлические волокна, голландскую сажу. При этом электропроводность обеспечивается переносом заряда через проводящие участки полученного материала, рассеянные по исходной матрице полимера.

Такие материалы обладают внешней проводимостью, поскольку ее обеспечивают включенные в матрицу полимера токопроводящие добавки. Однако эффективность переноса зарядов при этом невелика, поэтому и электропроводность обогащенных таким образом полимеров не превышает $10 \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{см}^{-1}$ [2].

Для создания подобных систем в качестве

матриц, наполняемых проводящими добавками, могут служить различные полимеры, в том числе и обладающие высокими изоляционными характеристиками (например, поливинилхлорид, полиуретан, нейлоны). Проводимость обогащенных полимеров определяется количеством добавок, введенных в матрицу, и достигает значений от 10^{-4} до $10 \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{см}^{-1}$.

Несмотря на относительно невысокую электропроводность их (по сравнению с металлами), такие вещества уже сейчас находят широкое практическое применение. В частности, они позволяют решать такую важную техническую проблему, как подавление электромагнитных помех, возникающих в компактных радиоэлектронных системах из-за увеличения плотности размещения в них компонент электронных схем. Экранирование паразитного электромагнитного излучения осуществляется путем нанесения на электронные схемы (или их части) изоляционных покрытий. При этом такие экранирующие покрытия должны обладать проводимостью от 10^{-2} до $10^{-1} \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{см}^{-1}$, что как раз и соответствует возможностям полимеров с внешней проводимостью.

Другая проблема, решаемая с помощью обогащенных полимеров с повышенной электропроводностью, состоит в возникновении в электронных схемах наведенных электростатических зарядов при функционировании радиоаппаратуры в широком диапазоне частот. Эти заряды создают столь интенсивные электромагнитные поля в компактных электронных устройствах, что могут не только ограничить их технические возможности, но и даже вывести из строя отдельные чувствительные элементы микросхем. Чтобы рассеять эти заряды, необходимо использовать в качестве защитных покрытий материалы, электропроводность которых лежит в пределах от 10^{-4} до $10^{-1} \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{см}^{-1}$, что могут обеспечить полимеры с внешней проводимостью.

Добиться электропроводности по величине близкой к металлической удастся легированием полимеров, то есть химическим путем, чем обеспечивается внутренняя проводимость материала. В качестве примера можно привести полиацетилен, получаемый путем химической полимеризации ацетилена. В легированном состоянии он обладает проводимостью по-

рядка $10^3 - 10^5 \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{см}^{-1}$, то есть сравнимой с электропроводностью металлов. В нелегированном состоянии этот полимер обладает проводимостью, характерной для полупроводников ($10^{-7} \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{см}^{-1}$).

На примере этого органического вещества можно проследить за механизмом проводимости обогащенных добавками полимеров, которая определяется степенью подвижности электронов химических элементов, из которых состоят такие материалы. Известно, что электроны могут участвовать в образовании достаточно прочных ковалентных связей между атомами. Атомы, прочно связанные друг с другом, не могут свободно перемещаться, что характерно для изоляторов. Однако полимеры, состоящие из атомов, связанных между собой ковалентными связями, могут стать проводниками, благодаря тому, что в органических молекулах существуют отличные от ковалентных π -связи.

Полиэтилен, химическую формулу которого можно представить как $[-\text{CH} = \text{CH}-]_n$, имеет молекулу в виде длинной цепочки атомов углерода, соединенных попеременно одинарной и двойной связью. Так как четырехвалентный атом углерода может вступить в связь с четырьмя другими атомами, то у него остается один свободный электрон, способный образовать дополнительную более слабую π -связь. Как и у всех остальных электронов вероятность распределения электронов, участвующих в π -связях, описывается орбиталью. В полимерах, обладающих внутренней проводимостью, перекрывание (или сопряжение) π -орбиталей приводит к образованию сверхмолекулярной орбитали, в которой электроны могут свободно перемещаться, обеспечивая электропроводность материала.

Исследования показали, что более чувствительными к проводящим добавкам являются полимеры, содержащие в своей химической структуре фенильные группы C_6H_5 (бензольные кольца), которые характеризуются наличием большого числа сопряженных двойных связей [1,3,4]. Бензольное кольцо обладает специфической электронной структурой, которая определяет электронные полупроводниковые свойства отдельных полимерных материалов. В бензольном кольце все атомы водорода жестко связаны σ -связями в его плоскости. В то же время $2p_z$ -орбитали углерода направлены перпендикулярно этой плоскости, расположены компланарно и вступают в резонансное взаимодействие. В результате такого взаимодействия индивидуальные $2p_z$ -орбитали углерода образуют коллективную π -орбиталь делокализованных электро-

нов, которая расположена над и под плоскостью кольца. Именно делокализованные π -электроны являются потенциальными источниками свободных носителей зарядов. Такие π -электроны, характеризующиеся высокой подвижностью, сравнительно низкой энергией электронного возбуждения, небольшой энергией ионизации, высокой молекулярной поляризуемостью, определяют основные электронные свойства полупроводникового материала.

К числу подобных материалов можно отнести такие полимеры, как полистирол и полифенилизобутилсилесквioxан, содержащие в боковых цепях фенильные группы, а также полианилин, основная цепь звена которого состоит из бензольных колец, связанных посредством атомов азота. Химическая модификация полимеров включением в бензольное кольцо основной цепи атомов азота (полипиррол) или серы (политиофен) приводит к увеличению их электропроводности до $10^2 \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{см}^{-1}$ даже без введения в них проводящих добавок.

Интересно, что при определенных условиях полимерные материалы могут проявлять даже свойства сверхпроводников. Практически уже синтезирован первый органический сверхпроводник, представляющий собой полимер со структурной формулой $(\text{SN})_n$ и имеющий критическую температуру $0,26\text{K}$. А в теории, предложенной У. А. Литтлом, предсказывается возможность существования полимерного сверхпроводника с критической температурой выше комнатной (вплоть до 1000K).

Несмотря на столь многообещающие перспективы использования обогащенных полимерных систем, имеют место существенные ограничения технического характера, препятствующие процессу активного внедрения их в практику. Дело в том, что введение проводящих добавок в матрицу (до 15%) заметно снижает механические характеристики полимеров. По этой причине при создании оптимальных по свойствам структур необходимо учитывать корреляцию между электрическими и механическими параметрами полимеров. Попытки изучения подобной корреляции предпринимались ранее. Так, по данным работы [5] отмечен одинаковый характер протекания процессов диэлектрической и механической релаксации в ряде полимеров. В частности, в полистироле и в полиалканимиде, содержащих в мономерных звеньях фенильные группы, температуры релаксационных переходов, обнаруженные механическими и электрическими исследованиями, практически совпадают.

Довольно любопытную закономерность обнаружили Старк и Гартон [6]. Они пришли к выводу, что кривая зависимости электрической прочности полиэтилена похожа по форме на кривую зависимости модуля упругости этого полимера от температуры. Характерно, что значение электрической прочности уменьшается по мере повышения температуры до тех пор, пока не расплавятся все кристаллы, а затем остается приблизительно постоянным. Это указывает на непосредственную связь между электрической и механической причиной разрушения полимера. Такое поведение можно понять, если допустить, что электрическое поле вызывает сжатие образца до некоторой степени, зависящей от значения его модуля упругости, после чего происходит его разрушение (механическое).

Исходя из таких предположений, авторы [6] получили соотношение, связывающее напряжение пробоя полимера с его модулями упругости. Используя идею Старка и Гартона о том, что электрический пробой полимерного материала связан с механическим разрывом цепей, получим соотношение, связывающее пробивное напряжение с модулем Юнга этого материала.

При наложении некоторого максимального напряжения U к образцу толщиной h пробивное напряжение $U_{пр}$ численно будет равняться напряженности электрического поля E .

$$E = U/h = U_{пр}.$$

Плотность энергии электрического поля:

$$\omega_э = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2$$

$$\text{или } \omega_э = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 U_{пр}^2$$

Где ϵ - диэлектрическая проницаемость среды, ϵ_0 - электрическая постоянная.

В то же время относительная деформация образца $\frac{\Delta h}{h}$ при модуле Юнга Y возможна при плотности энергии (энергии деформации):

$$\omega_м = \frac{Y}{2} \left(\frac{\Delta h}{h} \right)^2$$

Приравнявая значения плотностей энергии $\omega_э$ и $\omega_м$, получим:

$$U_{пр} = \frac{\Delta h}{h} \sqrt{\frac{Y}{\epsilon \epsilon_0}} \quad (1)$$

Выражение (1) позволяет рассчитать напряжение пробоя полимерного материала по его модулю Юнга для любой температурной области, в том числе и при температуре жидкого гелия.

Справедливость такого утверждения подтверждается сопоставлением значения $U_{пр}$ рассчитанных по формуле (1) и измеренных прямыми методами для полистирола и полиметилметакрилата [3], которые хорошо согласуются.

Заметим, что переходы носителей от одной цепи сопряжения в другую можно зафиксировать по изменению электропроводности и полимерных полупроводников в зависимости от частоты электрического поля. В работе [3] показано, что при возрастании частоты от нуля до 5 МГц электропроводность даже такого полимера как полиэтилен возрастает на 10 порядков, достигая насыщения (т.е. дальнейшее повышение частоты не сопровождается заметным изменением электропроводности).

В силу сказанного исследования целесообразно проводить на частотах порядка нескольких мегагерц. Именно такие частоты нами были использованы для определения упругих модулей ряда полимеров в области низких температур [7,8], что позволило оценить характерные для них значения напряжения пробоя, согласно формуле (1). При этом данные по диэлектрической проницаемости и относительной деформации изучаемых полимеров взяты в справочной литературе [3,9,10]. Результаты расчетов для температуры жидкого гелия, жидкого азота и для 240К представлены в таблице.

Сравнение рассчитанных значений напряжения пробоя, приведенных в таблице полимеров, с данными прямых электрических измерений приводит к их согласованию только по порядку величины. Наивно было бы ожидать их более точного совпадения, поскольку отсутствует однозначные сведения о диэлектрической проницаемости полимеров в области гелиевых температур, в приводимых значениях деформации разрушения в выбранном нами температурном диапазоне отмечается заметный разброс литературных данных. Кроме того, в работах [3,4] показано, что такие параметры как давление, температура, степень кристалличности, ориентация, приводящие к изменению межмолекулярного взаимодействия, способствуют и значительному изменению электропроводности полимеров, что также может являться причиной различия расчетных и экспериментальных величин их модулей упругости и пробивного напряжения.

Сравнение рассчитанных значений напряжения пробоя

Полимер	$\gamma \cdot 10^{-9}, \text{Н/м}^2$			$U_{пр} \cdot 10^{-4}, \text{В/м}$		
	4,2 К	77К	240К	4,2К	77К	240К
Полиоксиметилен	14,3	13,8	11,1	4,6	4,5	4,1
Поливинилхлорид	7,2	6,9	5,5	3,3	3,2	2,9
Полиметилметакрилат	8,3	8,0	7,0	3,5	3,4	3,2
Полипропилен	7,5	7,0	5,9	3,4	3,2	3,0
Поликарбонат	6,1	5,6	4,3	2,8	2,7	2,2
Полиэтилен	10,3	9,7	5,2	3,9	3,8	2,8
Полистирол	6,1	5,1	4,1	2,7	2,6	2,2
Политетрафторэтилен	7,9	7,7	5,1	3,5	3,4	2,8
Политрифторхлорэтилен	6,5	6,0	4,7	3,1	3,0	2,7
Полипиромеллитимид	6,2	5,9	3,9	2,7	2,5	2,0
Поли-4-метилпентен-1	3,4	3,1	2,3	2,6	2,4	2,1
Полифенилизобутилсилесквioxсан	5,6	5,4	3,5	2,5	2,4	2,0
Эпоксидная смола ЭД-5	8,6	8,3	6,8	3,6	3,5	3,2
Найлон-6	8,0	7,7	4,4	3,5	3,4	2,6
Найлон-7	8,5	8,2	4,9	3,6	3,5	2,7
Найлон-6,10	9,2	8,8	5,6	3,7	3,6	2,9
Найлон-11	7,5	7,2	3,5	3,4	3,3	2,4
Поливинилфторид	7,6	7,3	6,2	3,2	3,1	2,8

Тем не менее, результаты, приведенные в таблице, свидетельствуют о правильности теоретических выводов и прогнозов о том, что более высокой электропроводностью обладают полимеры (не обогащенные проводящими добавками), в цепях которых содержатся бензолные кольца с двойными сопряженными связями. Действительно, полимеры с такими структурными эле-

ментами – полистирол, полифенилизобутилсилесквioxсан, поликарбонат, поли4метилпентен1, полипиромеллитимид - обладают самыми низкими значениями напряжения пробоя, что указывает на более свободное состояние в них носителей зарядов по отношению к другим полимерам.

Библиографический список

1. Ф. Гутман, Л. Лайонс. Органические полупроводники М.: Мир, 1970. 696с.
2. Ф. Гарнье. Проводящие полимеры// Успехи физических наук. 1989.Т.157. вып3. С. 513 - 527.
3. Б.И. Сажин. Электрические свойства полимеров. Л.: Химия, 1970. 376с.
4. Э.А.Силиньш, Л.Ф. Тауре. Органические полупроводники. М.: Знание, 1980. №12. 64с.
5. O.Yano, Y Wada. Journal of Polimer Science. 1971. A2. №4. P.669 - 675.
6. K. Stark, C. Garton. Nature. London. 1995. V.176. P. 1225 1231.
7. П.Д. Голубь. Исследование молекулярного движения и релаксационных процессов в некоторых полимерах ультраакустическим методом при гелиевых температурах. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: Изд-во МОПИ, 1973. 157 с.
8. В.Е. Сорокин. Исследование молекулярной подвижности в полимерах акустическим методом вблизи температуры жидкого гелия. М.: Изд-во НИИПМ, 1971. 149с.
9. М.Ю. Кацнельсон, Г.А. Балаев. Пластические массы. Справочник. Л.: Химия, 1978. 384 с.
10. А.А. Аскадский. Деформация полимеров. М.: Химия, 1973. 448с.

А.А. Коваленко, Е.М. Скурыдина, О.В. Пожидаева

ИССЛЕДОВАНИЕ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ПОДВИЖНОСТИ СЛОЖНЫХ ЭФИРОВ ЦЕЛЛЮЛОЗЫ

Актуальность темы связана с потребностями фармацевтической промышленности, выпускающей широкий ассортимент лекарственных препаратов на основе аминокислот, которые находят применение в неврологической практике. Интерес фармакологов к сложным эфирам целлюлозы, содержащим в связанном виде аминокислоты, связан с потенциальной биологической активностью синтезируемых соединений, что создает возможность их использования в качестве лекарственных препаратов пролонгированного действия. Выбор целлюлозы в качестве полимерного носителя основан на том, что она физиологически нейтральна, но при этом способна образовывать достаточно прочные сложэфирные связи с лекарственным веществом [1].

При изучении характера молекулярной подвижности полимеров и сложных полимерных систем в настоящее время все более широкое распространение получают спектрометрические методы исследования [2, 3]. В самой общей постановке вопроса суть спектрометрического подхода заключается в получении зависимостей каких либо физических характеристик материалов от частоты возмущающего воздействия или от температуры. При этом наиболее часто используются калориметрические, акустические, механические и диэлектрические характеристики. В двух последних случаях измеряемым информативным параметром, "ответственным" за релаксационные свойства материала, чаще всего является тангенс угла потерь (соответственно, механических либо диэлектрических).

Для исследования характера молекулярной подвижности синтезированных эфиров нами анализировались диэлектрические свойства. Ввиду того, что исследуемое вещество получалось в порошкообразном виде, механические испытания его (динамический механический анализ или ДМА), очевидно, не осуществимы. Кроме того, при наличии в макромолекуле полимера полярных групп (а в нашем случае дело обстоит именно так) диэлектрические измерения предпочтительнее в силу более высокой чувствительности электрических методов [4]. В частности, точность измерения тангенса угла диэлектрических потерь обычно на один-два порядка выше точности измерения тангенса угла механических потерь.

Общеизвестно [5], что для любого полимера при фиксированной частоте воздействия зависимость поглощаемой энергии от температуры, как правило, представляет собой монотонную кривую, имеющую несколько (минимум два) локальных экстремумов. При этом максимумы поглощения наблюдаются в определенных температурных интервалах, соответствующих размораживанию какого-либо типа молекулярной подвижности. Размораживание сегментальной подвижности (α -релаксация) сопровождается переходом аморфной фазы полимера из стеклообразного в высокоэластическое состояние. Это наиболее высокотемпературный из релаксационных переходов, выше него по температуре могут располагаться [3] только переходы, обусловленные подвижностью в кристаллических областях и на границе аморфной и кристаллической фаз (в случае частично кристаллических полимеров).

Температуру, условно отделяющую область стеклообразного состояния полимера от области высокоэластичности, называют температурой стеклования T_g . С физической точки зрения она соответствует началу кооперативного процесса размораживания сегментального движения макромолекул полимера и называется обычно температурой структурного стеклования. Заметим, что, несмотря на широкое использование в литературе термина "температура стеклования", в настоящее время нет общепризнанной методики ее определения, а разные методы определения T_g дают несколько различающиеся результаты. В связи с этим в дальнейшем будем, как правило, пользоваться более общим понятием характеристической температуры, поскольку оно охватывает как релаксационные (α -, β -, γ -переход), так и фазовые переходы любых видов и подразумевает учет конкретных условий испытания. Последнее обстоятельство особенно важно при использовании динамических методов измерений в связи с достаточно выраженной зависимостью результатов от частоты воздействия.

При использовании диэлектрических методов исследования за характеристическую температуру перехода обычно принимают положение на оси температур максимума тангенса угла диэлектрических потерь [3, 6]. Внешнее сходство

получаемых графиков со спектрами поглощения веществом рентгеновского и оптического излучений в совокупности с существованием температурно временной аналогии [7] обусловили возможность сходного математического описания. В связи с этим подобные методы в последнее время обычно называют спектрометрическими [1, 2, 5, 8].

В простейшем случае температурную зависимость тангенса угла потерь в области локального максимума по аналогии с [9] можно описать гауссовской кривой (гауссианой) [10] либо (в случае резко асимметричного максимума) суммой нескольких гауссиан. Такой подход, доказавший высокую степень информативности при выполнении динамического механического анализа [11, 12], позволяет выявить структуру перехода и помогает идентифицировать отдельные релаксационные процессы, а также оценить их основные параметры (положение на оси температур, ширину и относительную интенсивность переходов, а также энергию активации). Преимущества спектрометрического подхода при анализе результатов измерений диэлектрических харак-

теристик наиболее отчетливо проявляются при исследовании сложных полимерных систем, когда в материале наблюдается несколько релаксационных переходов, зачастую налагающихся друг на друга.

С целью исследования характера молекулярной подвижности были выполнены измерения диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь $tg\delta$ прессованных образцов предгидролизованной древесины осины и трех сложных эфиров целлюлозы, полученных в результате взаимодействия этой древесины с глицином, β -аланином и γ -аминомасляной кислотой. Как известно, перечисленные кислоты отличаются друг от друга количеством CH_2 -групп, увеличивающимся на единицу при переходе к каждому последующему члену гомологического ряда. Относительная погрешность измерений $tg\delta$ в диапазоне температур от 290 до 550 К составляла 10^{-3} . Результаты измерений величины диэлектрических потерь в образцах предгидролизованной (свободной от гемицеллюлоз) древесины осины приведены на рис. 1.

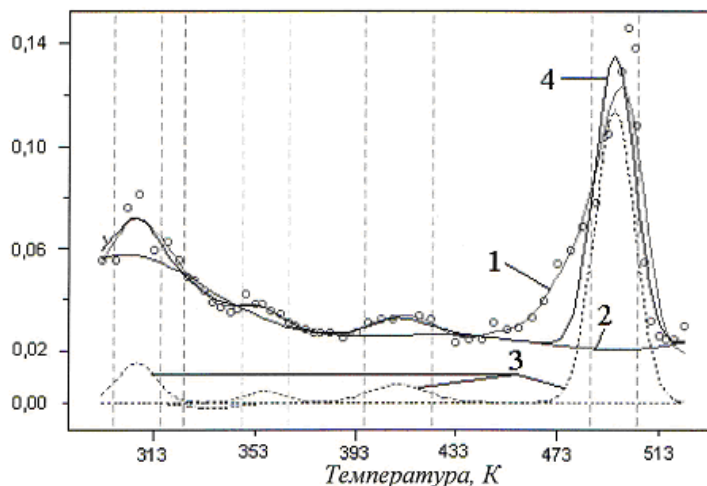


Рис.1. Температурная зависимость тангенса угла диэлектрических потерь предгидролизованной древесины осины во всем исследованном интервале температур. Точки - эксперимент. 1 - сглаженная кривая. 2 - базовая линия. 3 - отдельные гауссианы. 4 - сумма гауссиан и базовой линии.

Для обработки экспериментальных данных и определения границ релаксационных переходов использовались методы дифференциальной спектрометрии [8], адаптированные для анализа результатов диэлектрических измерений. При этом температурную зависимость тангенса угла диэлектрических потерь $tg\delta$ аппроксимировали с помощью сглаживающих кубических сплайнов по методике, подробно изложенной в [13]. Далее с помощью базовой линии из полученной

функции (зависимости $tg\delta$) вычитали часть, слабо зависящую от температуры (аналог аморфного гало в рентгеновской спектроскопии), а оставшуюся часть, "ответственную" за процессы α - релаксации, разлагали на отдельные гауссианы [8]. При этом считали, что каждый релаксационный процесс в соответствующих координатах может быть описан своей гауссовской кривой, полагая, что каждая такая кривая описывает релаксацию определенного вида кинети-

ческих элементов. (Обратное не всегда верно: при достаточной близости нескольких релаксационных процессов они могут быть описаны одной гауссианой, которая на самом деле является суммой нескольких гауссовских кривых). Относительная доля вклада отдельных релаксационных процессов в величину диэлектрических потерь в области α -перехода может быть оценена при этом по площади S , заключенной под каждой гауссовской кривой.

Результаты этих операций для предгидролизованной древесины осины наглядно представлены на рис. 1. При этом за характеристическую (наивероятнейшую) температуру перехода

в отдельных компонентах исследованного материала принимали ее значение, соответствующее положению центра гауссианы, аппроксимирующей температурную зависимость $tg\delta$, а за ширину перехода ширину соответствующей гауссианы, традиционно определяемую на уровне полувысоты пика. Полученные в результате расчетов характеристики релаксационных переходов в древесине осины сведены в *таблицу 1*.

В данной таблице (и далее в тексте) приняты следующие обозначения: T_n характеристическая температура перехода; T_1, T_2 и ΔT соответственно температурные границы и ширина перехода; U энергия активации.

Таблица 1

Характеристики релаксационных переходов в предгидролизованной древесине осины.

Номер перехода	T , К	T_n , К	T_2 , К	ΔT , К	U , кДж/моль
1	297	306	316	19	82
2	348	357	366	18	118
3	396	410	424	28	100
4	486	495	505	19	214

Для идентификации переходов использовали известные литературные данные. Согласно обзору [14] область температур от 453 до 513 К соответствует расстекловыванию целлюлозы, причем большинство исследователей сужают этот интервал до участка $473 \div 513$ К, так что наиболее вероятная температура стеклования целлюлозы составляет, по-видимому, 493 К. В условиях нашего эксперимента характеристическая температура α -перехода в целлюлозе 495 К, что хорошо согласуется как с упомянутой выше оценкой, так и с данными [15], согласно которым температура стеклования целлюлозы составляет 480 К. Расхождение на 15 К нашего эксперимента с результатами авторов работы [14] легко объясняется различиями в частоте испытаний. Хорошо известно [4], что с увеличением частоты воздействия на один десятичный порядок поло-

жение максимума потерь для большинства полимеров смещается в сторону высоких температур на $5 \div 7$ К. В нашем эксперименте измерения осуществлялись на частоте 1 кГц, в то время как в работе [14] приведены результаты измерений, выполненных на крутильном микромаятнике при частоте колебаний 1 Гц.

Переход при 410 К очевидно соответствует α -процессу в лигнине (по литературным данным [14] температура размягчения лигнина древесины осины 407 К).

Два более низкотемпературных перехода не станем идентифицировать по двум причинам: во-первых, относительно их природы и положения на шкале температур существуют весьма разноречивые мнения [13], во-вторых, они явно не имеют отношения к целям нашего исследования.

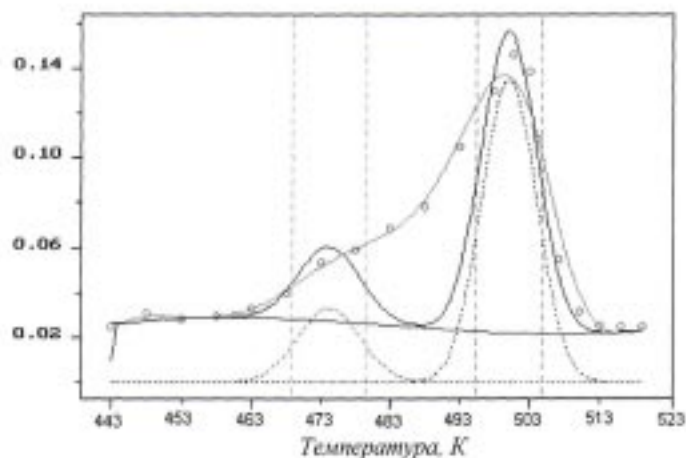


Рис.2. Температурная зависимость тангенса угла диэлектрических потерь предгидролизованной древесины осины в интервале 440 ÷ 520 К.

Важнейшим параметром релаксационного перехода является его энергия активации. Авторами работы [16] описан достаточно простой способ оценки этой величины по данным теплофизических измерений, согласно которому энергию активации i -го релаксационного перехода можно вычислить по формуле $U_i = 2RT_i^2/\Delta T_i$, где ΔT_i - ширина, а T_i - наиболее вероятная температура перехода. Следует отметить, что предлагаемый подход, используемый и в нашей работе, фактически позволяет определять некую эффективную энергию активации в приближении одного времени релаксации.

Обратим внимание (см. рис.1) на достаточно выраженную асимметрию пика $tg\delta$, соответствующего растекловыванию целлюлозы. Если ограничить интервал температур, для которого выполняется анализ, рамками 440 ÷ 520 К, описанная методика разложения на гауссианы позволяет легко выявить структуру перехода.

Это отчетливо видно на рис.2, демонстрирующей упомянутую процедуру.

По результатам нашего эксперимента в указанном интервале можно выделить две характеристические температуры: 474 и 500 К. По-видимому, в соответствии с принятыми представлениями [4] о двух уровнях надмолекулярной организации полимеров, эти температуры определяют расстекловывание соответственно разрыхленных и плотноупакованных участков целлюлозных цепей.

По аналогичной методике были исследованы образцы трех сложных эфиров целлюлозы, полученные в результате взаимодействия предгидролизованной древесины с рядом аминокислот: глицином, β -аланином и γ -аминомасляной кислотой (ГАМК). Результаты измерений представлены в таблице 2.

Таблица 2

Температурные границы и энергии активации релаксационных переходов в сложных эфирах целлюлозы.

Эфир кислоты / температура синтеза	T_1 , К	T_m , К	T_2 , К	ΔT , К	U , кДж/моль
Глицин /50°C	446	453	461	15	114
	464	469	475	11	166
	480	482	485	5	386
Бета-аланин /40°C	397	405	413	16	85
	436	444	452	16	102
	480	485	489	9	217
Бета-аланин /50°C	391	402	414	23	58
	434	443	451	17	96
	482	489	496	14	142
ГАМК /50°C	407	411	415	8	175
	415	420	424	9	163

В эфирах целлюлозы, полученных в результате взаимодействия с глицином, не удается выделить релаксацию остатков лигнина вследствие наложения мощного пика диэлектрических потерь неидентифицированного происхождения. В области более высоких температур асимметричную зависимость $tg\delta$ (см. рис. 3) можно представить как результат наложения трех гауссовских пиков. Первый из них (и самый большой по интенсивности) естественно связать с размораживанием сегментальной подвижности молекул эфира. Его характеристическая температура составляет 453 К. Два других релаксационных процесса описывают, по-видимому, расстекловывание остатков целлюлозы.

Для эфиров целлюлозы на основе β -аланина главная релаксационная область также содержит три достаточно четко выраженных пика диэлектрических потерь, первый из которых (в порядке возрастания температуры) соответствует релаксации остатков лигнина, второй - α - релаксации макромолекул эфира, а третий - α - процессу в непрореагировавшей целлюлозе.

Для образцов, полученных при разной температуре синтеза, результаты качественно совпадают. Однако, высота второго пика для эфира, синтезированного при 40°C, больше, чем для эфира, синтезированного при температуре 50°C. Это говорит о большем выходе продукта при температуре синтеза 40°C. Последний вывод подтверждается независимыми результатами химического анализа, согласно которым оптимальная температура синтеза составляет 40°C.

Для эфира γ -аминомасляной кислоты (ГАМК) в области максимума диэлектрических потерь можно выделить два частично налагающихся друг на друга гауссовских пика. Пер-

вый из них (при 411 К) описывает, очевидно, α -релаксацию в лигнине, а второй (при 420 К) связан с размораживанием сегментальной подвижности молекул γ -аминобутирата целлюлозы. Заметим, что содержание лигнина в исследованном материале не превышало 10%, поэтому сам факт обнаружения релаксационного процесса при этой температуре свидетельствует о высокой чувствительности метода. В то же время не удается выделить четко выраженного максимума потерь в области температур, соответствующих стеклованию целлюлозы. На наш взгляд, это является свидетельством полноты протекания химической реакции, не оставившей сколько-нибудь заметных остатков исходного сырья.

Подведем итоги. С ростом массы кислотного остатка в эфирах целлюлозы наблюдается смещение области α -релаксации в направлении низких температур. Очевидно, что указанное смещение максимумов дипольно-сегментальных потерь можно объяснить увеличением свободного объема, вызванного "разрыхлением" структуры при введении более массивных кислотных остатков молекул аминокислот. Это ведет к уменьшению межмолекулярного взаимодействия и снижению высоты соответствующего потенциального барьера. Однако энергия активации α -процесса в γ -аминобутирате целлюлозы (см. таблицу 2) оказывается примерно в полтора раза выше, чем в двух других эфирах, что, на первый взгляд, противоречит последнему утверждению. Однако на самом деле никакого противоречия нет, так как на величину энергии активации кроме высоты потенциального барьера влияет еще и степень кооперативности релаксационного процесса, которая, очевидно, растет с увеличением массы кислотного остатка.

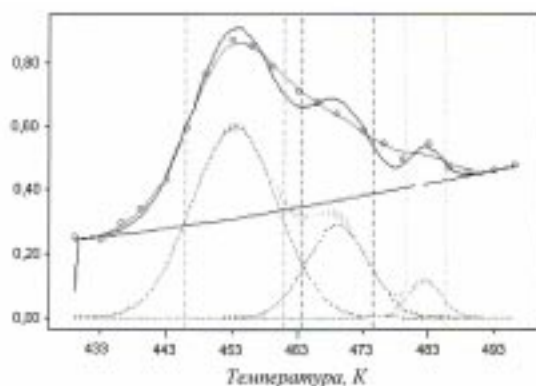


Рис.3. Температурная зависимость тангенса угла диэлектрических потерь сложного эфира целлюлозы, полученного на основе глицина.

Таким образом, спектрометрический анализ температурных зависимостей диэлектрических потерь в сложных полимерных системах, примерами которых являются исследованные материалы, служит надежным и высокочувствительным методом исследования молекулярной подвижности. В частности, он позволяет определить наличие релаксационных переходов и их характеристики, а при наличии дополнитель-

ной информации идентифицировать их. Полученные результаты могут быть использованы технологами, занимающимися синтезом и переработкой лигноцеллюлозных материалов.

В заключение авторы выражают благодарность за предоставленные образцы доценту кафедры ТППиЭ АлтГТУ Коньшину В. В. и аспиранту Беушеву А. А., синтезировавшим исследованные материалы.

Библиографический список

1. Григорянц И.К., Труханова Г.А. Полимерные материалы и устройства для контролируемого выделения лекарственных препаратов. // Пластические массы. 1998. № 3. С. 35-49
2. Матис И.Г. Спектрометрические методы исследования структуры композитных материалов. // Мех. композ. матер. 1991. №2. С. 320-334
3. Perez J. Исследование полимерных материалов методом механической спектрометрии. Обзор. // ВМС. сер. Б. Т.40. 1998. №1. С. 102-135
4. Лущейкин Г.А. Методы исследования электрических свойств полимеров. М.: Химия, 1988. 160 с.
5. Перепечко И.И. Введение в физику полимеров. М.: Химия. 1978. 310 с.
6. Бартенев Г.М., Френкель С.Я. Физика полимеров. Л.: Химия, 1990. 432 с.
7. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. Пер. с англ. М.: ИЛ, 1963. 564 с.
8. Исупов В.В., Старцев О.В. Численные методы в динамической механической спектроскопии полимеров. //В сб. Международной конференции "Математические модели и численные методы механики сплошных сред", 27 мая 2 июня 1996г. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1996. С.292-293
9. Бернштейн И.Я., Каминский Ю.Л. Спектрофотометрический анализ в органической химии. Л.: Химия, 1986. 200 с.
10. Анго А. Математика для электро- и радиотехников. Пер. с франц. М.: Наука, 1967. 580 с.
11. Issoufov V.V., Startsev O.V., Krotov A.S., Vien-Inguimbert V. Fine effects in epoxy matrices of polymer composite materials alter exposure to a space environment. // J. Polymer Composites, 2002. V.6. No. 2. P. 123-131
12. Насонов А.Д., Коваленко А.А., Жолнеров А.В. Влияние радиационного старения на релаксационные свойства поликарбоната. // Сборник трудов Международной научно-технической конференции "Композиты - в народное хозяйство России". Под ред. Маркина В.Б. Барнаул: Изд во АлтГТУ, 1998. С.26 32
13. Старцев О.В., Сортыяков Е.Д., Исупов В.В., Насонов А.Д., Скурыдин Ю.Г., Коваленко А.А., Никишин Е.Ф. Акустическая спектроскопия полимерных композитных материалов, экспонированных в открытом космосе // Экспериментальные методы в физике структурно-неоднородных сред. Барнаул: Изд-во АГУ, 1997. С. 32-39.
14. Шахзадян Э.А., Квачев Ю.П., Папков В.С. Температурные переходы в древесине и ее компонентах. ВМС, 1992, т. А, №9, с. 3-14
15. Бадаев А.С., Перепечко И.И., Сорокин В.Е. Молекулярная подвижность и релаксационные переходы в гидратцеллюлозных волокнах в интервале температур 20÷560 К. ВМС, 1985, т. А, №7, с. 1492-1495
16. Янчевский Л.К., Шут Н.И., Лазоренко М.В., Левандовский В.В. Определение параметров релаксационного перехода по данным теплофизических измерений /ВМС. сер. А. Т.32. 1990. №2. С.307-309

*Ю.Г. Скурыдин, Е.М. Скурыдина***КОМПОЗИЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ ИЗ РАСТИТЕЛЬНЫХ ОТХОДОВ БЕЗ СВЯЗУЮЩИХ ВЕЩЕСТВ**

Традиционно, композиционные плитные материалы для мебельной промышленности и строительства получают на основе древесины, и состоят они из двух частей - древесного наполнителя и полимерного связующего. В качестве полимерных связующих веществ используются синтетические термореактивные смолы, приготовленные на основе фенолов, мочевины, формальдегида и изоцианатов. Несмотря на очевидные достоинства этих материалов, в последнее время обращают на себя внимание и их существенные недостатки, заставляющие технологов всего мира искать принципиально новые способы создания материалов подобного класса, лишенных недостатков традиционных композитов.

Общеизвестно, что в процессе производства и эксплуатации древесно-стружечных и древесноволокнистых плит, полученных традиционным способом с использованием термореактивных смол, в окружающее пространство в больших количествах выделяются токсичные вещества, что неблагоприятно сказывается на качестве жизни людей, находящихся в контакте с ними. Следует отметить, что экологический фактор в последние годы фактически предопределяет судьбу тех или иных технологий и разработок в развитых странах. В Европе происходит постепенное вытеснение вредных производств в третьи страны, вводится полный запрет на использование небезопасных материалов. Другим немаловажным фактором, способствующим интенсификации разработок принципиально новых технологий получения древесных композиционных материалов, является весьма высокая стоимость веществ, используемых в качестве связующих компонентов, достигающая в ряде случаев 60% стоимости готовых материалов. Наряду с этим, в связи с ростом экологической ответственности, чрезвычайно остро стоит вопрос разработки способов полезной и прибыльной утилизации большого количества отходов лесоперерабатывающей отрасли и сельскохозяйственного растениеводства. В связи с глобальным истощением запасов качественной древесины и медленным ее воспроизводством, возникает необходимость вовлечения в коммерческий оборот материалов, не находящихся в настоящее время потенциально большого спроса на рынке: древесины лиственных пород (осина, бе-

реза, клен, и т.п.), кустарника, тростника.

Одним из возможных путей решения обозначенных задач является разработка и создание композиционных материалов, получаемых без связующих веществ. На протяжении ряда лет на Алтае разрабатывается метод, позволяющий получать композиционные материалы (аналоги древесностружечных и древесноволокнистых плит) из любых материалов растительного происхождения без добавления каких-либо связующих веществ на стадии прессования [1-3]. Лигноцеллюлозным сырьем для них может служить любая растительность в виде лесных и сельскохозяйственных отходов: кора, частицы древесины, стебли, корни, листва, шелуха, солома, стручки, и т.п. Причем они могут быть использованы как по отдельности, так и в комбинации друг с другом для достижения качественных характеристик в соответствии с той или иной сферой применения.

В основе методики лежит глубокая физико-химическая модификация (предобработка) исходного сырья с последующим горячим прессованием его в композитный материал.

Для получения плитных материалов без добавления связующих веществ использована перспективная, находящаяся в последнее время все более широкое использование технология водно-тепловой обработки, основанная на методе взрывного автогидролиза - "парового взрыва" [4,5], позволяющего селективно воздействовать на лигноуглеводный комплекс растительного материала. При обработке лигноцеллюлозы насыщенным паром при высокой температуре, происходят физико-механические и химические изменения, сопровождающиеся деструкцией основных компонентов, входящих в его состав - разрушение морфологической структуры, гидролиз лигнина и гемицеллюлоз с образованием низкомолекулярных водорастворимых продуктов - пентозанов и гексозанов (редуцирующих веществ), содержащих альдегидные группы. Образующиеся редуцирующие вещества [6] при нагревании способны вступать в реакцию с низкомолекулярными фенольными фрагментами лигнина, и играют роль связующего компонента в получаемом композитном материале.

Обработанное перегретым паром сырье при последующем горячем формовании без добав-

ления каких-либо связующих веществ образует прочный и стабильный композиционный материал с высокими физико-механическими и гидрофобными показателями. Основной реакцией, предположительно протекающей при этом, является реакция поликонденсации с образованием термопластичных смол. Подробный анализ возможных превращений, приводящих к "самосклеиванию" волокнистой массы на стадии прессования, приведен в работе [7].

В определенном приближении разрабатываемый способ можно считать аналогом практически неизвестного на пространстве бывшего СССР процесса получения древесно-композитного материала "мезонит". Технология в настоящее время применяется в Северной Америке, и также базируется на использовании взрывного автогидролиза растительной биомассы [8]. Прессование материала осуществляется "мокрым", либо "сухим" способом. Однако, при производстве "мезонита", как правило, используются добавки смол и реагентов, увеличивающих прочность, водостойкость и другие механические показатели материала.

Работы в направлении использования взрывного автогидролиза для получения композитов без связующих веществ ведутся в настоящее время в Японии и Канаде, свидетельством чему является патент РФ по конвенционной международной заявке № 2075384 (автор Куо-Сенг Шен). Сущность этого изобретения является наиболее близкой к российской разработке.

Процесс получения композиционных материалов включает две основные стадии. На первом этапе древесина (лигноцеллюлозный материал) в виде опилок, стружки или щепы подвергается воздействию перегретого насыщенного пара в закрытом сосуде при температуре $443 \div 503$ К. Давление в реакторе установки соответствует давлению насыщенного пара при заданной температуре и составляет $8 \div 30$ атм. По истечении времени, необходимого для обработки, производят резкий сброс давления до уровня атмосферного, осуществляя быструю (взрывную) разгрузку древесной массы в приемное устройство. Длительность и температура паровой стадии определяют степень дисперсности получаемой волокнистой массы и глубину гидролитического воздействия на древесину, что обуславливает конечные характеристики композитного материала в соответствии с заданными условиями эксплуатации изделия. Обработанная паром древесина на выходе из устройства представляет собой влажную разволокненную массу бурого цвета, степень дисперсности которой

зависит от жесткости условий обработки и степени первоначального измельчения. Следует отметить, что условие "взрывного" способа декомпрессии не является обязательным. Определяющим фактором, влияющим на свойства волокнистой массы и композитного материала, является температурно-временной, а давление может быть сброшено постепенно.

На второй стадии, гидролизованная и предварительно высушенная древесная масса формируется в виде волокнистого ковра и подвергается горячему прессованию без использования добавок каких-либо компонентов. Прессование можно осуществлять на стандартном прессовом оборудовании, используемом в производственном процессе получения древесностружечных плит. Температура прессования сравнительно невысока, и лежит в пределах $383 \div 433$ К, давление не превышает 80 кг/см^2 .

Отпрессованный материал представляет собой твердую однородную плиту коричневого цвета, внешний вид которой определяется исходной природой материала и жесткостью режимов обработки. Шероховатость поверхности зависит исключительно от качества рабочих поверхностей плит пресса.

В зависимости от режимов получения материала, и требований к характеристикам конечного продукта, его свойства могут быть изменены в весьма широких пределах. Плотность: $600 \div 1400 \text{ кг/м}^3$, прочность при статическом изгибе: $10 \div 60$ МПа. Водопоглощение и разбухание за 24 часа, определяемые по ГОСТ 10632: $6 \div 30$ %, $8 \div 30$ % соответственно. Температура стеклования $393 \div 413$ К.

Одним из преимуществ разрабатываемой технологии является возможность изменения физико-механических показателей получаемого материала в зависимости от требуемых условий, используя не только разные режимы паровой обработки и прессования, но и другие способы, например применение сырья различных видов, или использование веществ, усиливающих гидролитические превращения в лигноцеллюлозе с получением дополнительного количества низкомолекулярных сахаров.

Одним из наиболее перспективных направлений совершенствования характеристик материалов, получаемых по данной технологии, является создание композиций особого рода, включающих помимо гидролизованной лигноцеллюлозной массы ряд дополнительных компонентов органической и неорганической природы. В качестве таких компонентов прессовочных масс могут выступать стеклянные и органиче-

ские волокна, нити, ткани, полимерные и металлические сетки, полиэтилен, и т.п. Проведено большое количество экспериментов по оценке влияния различных составляющих такого рода на физико-механические характеристики композитного материала.

Например, использование всего одного слоя металлической сетки с размером ячейки 3×3 мм² в качестве внутренней армирующей структуры, приводит к резкому увеличению одного из важнейших показателей материала - ударной вязкости. Так, исходный образец композитного материала, полученный из сосновой древесины без впрессовывания сетки имеет ударную вязкость порядка 2,5 кДж/м², а при наличии сетки этот показатель возрастает в три раза и составляет 7,5 кДж/м². При этом плотность увеличивается лишь на десять процентов. Впрессовывание одного слоя бязи приводит к почти двукратному увеличению ударной вязкости (до 4,8 кДж/м²) при практически неизменной плотности.

Использование тонких полиэтиленовых и полипропиленовых прослоек в качестве компонента наружных слоев приводит к резкому улучшению гидрофобных характеристик материала. Его водопоглощение и разбухание после 24-х часового пребывания в воде (без полиэтилена) составляет $8 \div 15\%$, тогда как с полиэтиленом снижается до $4 \div 5\%$. Прочностные свойства, плотность и ударная вязкость при этом остаются неизменными.

К интересным результатам приводит добавление в волокнистую массу при прессовании отходов полиэтилена в виде мелкой стружки. Таким образом смоделирован процесс получения композитного материала, имеющего в своем составе до 20% отходов полимерных материалов, широко используемых в развитых странах при производстве конструкционных материалов подобного класса. Обнаружено, что наряду с очевидным существенным улучшением гидрофобных показателей, в материале с содержанием полиэтилена до 10% наблюдается увеличение удар-

ной вязкости и прочности. Причем ввод даже незначительного его количества - до 1,0% увеличивает прочность при изгибе и ударную вязкость приблизительно на 20%. Дальнейшее увеличение содержания полиэтилена лишь незначительно улучшает эти показатели.

Широкие возможности изменения параметров процесса на всех стадиях изготовления, в комплексе с использованием дополнительных компонентов, позволяют получать материал с заранее заданными свойствами для разных условий эксплуатации. Область его применения обусловлена весьма высокими физико-механическими свойствами и может включать мебельную промышленность (производство мебели), строительство (строительные конструкции, панели, кровля, антресоли, настил полов), производство корпусов приборов, тары, и т.п.

Таким образом, разработан новый, потенциально менее затратный способ получения композиционных материалов - аналогов ДСП и ДВП с высокими физико-механическими показателями. Относительно низкая себестоимость изделий обусловлена отсутствием необходимости в использовании каких-либо связующих компонентов, кроме тех, что образуются в самом лигноцеллюлозном материале при паровой предобработке, а также возможностью использования любого лигноцеллюлозного сырья, в том числе отходов, являющихся дешевым неликвидным продуктом сельскохозяйственного и деревообрабатывающего производств.

Низкая токсичность плит и относительная простота технологии их получения могут стать фактором, способствующим лучшему коммерческому сбыту, как самого материала, так и изделий из него по сравнению с традиционными аналогами. Кроме того, производство материала по представленному способу, несомненно, является более технологичным с точки зрения получения плит с заданными свойствами для тех или иных условий эксплуатации без существенной переделки и перенастройки традиционных технологических процессов.

Библиографический список

1. Старцев О.В., Салин Б.Н., Скурыдин Ю.Г. Пресс-композиция, способ ее получения и способ получения композиционных материалов на ее основе. Патент РФ № 2152966, 2000.
2. Startsev O.V., Salin B.N., Skuridin Yu.G., Utemesov R.M., Nasonov A.D. Physical properties and molecular mobility of new wood composite plastic "thermobalite". Wood Science and Technology, 1999, vol.33, №1, pp.73-78.
3. Старцев О.В., Салин Б.Н., Скурыдин Ю.Г. Композиционные плитные материалы, изготовленные из древесины без использования связующих веществ. Сб. тезисов "Композиционные материалы на основе древесины, их технология, структура, свойства и кон-

- струкции из них", МГУЛ, Москва - Мытищи. 1997. с. 38-39.
4. Гравитис Я.А. Теоретические и прикладные аспекты метода взрывного автогидролиза растительной биомассы // Химия древесины. 1987. № 5. С.3-21.
 5. Бобров Ю.А., Жалина В.А. Взрывной способ получения древесной массы. Части 1,2. Портал лесопромышленника Древесина.com. Источник: <http://www.drevesina.com>.
 6. Старцев О.В., Салин Б.Н., Скурыдин Ю.Г. Баротермической гидролиз древесины в присутствии минеральных кислот. Доклады Академии наук. 2000. том 370, № 5. стр. 638-641.
 7. Скурыдин Ю.Г. Строение и свойства композиционных материалов, полученных из отходов древесины после взрывного гидролиза. Дисс. на соиск. уч. степени канд. техн. наук. Барнаул. 2000. 147с.
 8. Mason W.H. Process for making hardboard. US Patent №2317394, 1943.

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

УДК 514.765

А.М. Ищук

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТЕНЗОРНОМУ АНАЛИЗУ

В работах [1]-[2] мы рассматривали возможности применения аналитического пакета "Maple" при изучении студентами курса "Риманова геометрия и тензорный анализ", особенности построения этого курса для студентов педагогического вуза. В этой статье мы рассмотрим один из вариантов контроля усвоения этого материала студентами.

Для проверки знаний студентов нами была разработана система тестов. Особенность этих тестов заключается в их структуре - это та же структура, которая используется в тестах ЕГЭ - единого государственного экзамена по математике. Тест состоит из трех блоков.

Первый включает в себя задания с выбором ответа. Это задания наиболее простые по своему содержанию. В нашем случае задачи этого блока направлены на проверку усвоения основных понятий римановой геометрии и тензорного анализа, на проверку знаний основных теорем этого курса, он включает в себя простейшие упраж-

нения по материалу наиболее важных разделов курса.

Второй блок - это задачи, которые уже предполагают не выбор ответа (где подсказкой могут служить предлагаемые варианты), а решение задачи и самостоятельную запись ответа, в качестве которого может выступать как число, так и, например, матрица.

Задачи третьего блока являются наиболее сложными из предлагаемых. Как и в тестах единого государственного экзамена по математике они предполагают тщательную проверку решения преподавателем (опираясь на определенные критерии проверки). Решение этих задач чаще всего представляет собой доказательство определенных утверждений. Они требуют от студента владения иными навыками, иными знаниями из курса, нежели в первых двух случаях. В качестве иллюстрации рассмотрим один из вариантов, предлагаемых бакалаврам на итоговой контрольной работе.

А

1. Какое из данных определений является определением тензора?

1. Если некоторой системе координат (некоторому базису) в n -мерном линейном пространстве X отнесена система n^{p+q} чисел $A_{i_1, \dots, i_p}^{j_1 \dots j_q}$, $i_1, \dots, i_p, j_1 \dots j_q = 1, \dots, n$, причем при переходе от этой системы координат к некоторой другой (от данного базиса к некоторому другому) эти числа преобразуются по "тензорному закону", то мы говорим, что нам задан тензор. Этот тензор называется p раз ковариантным и q раз контравариантным. Число $p + q$ называется рангом (валентностью) тензора. Сами числа $A_{i_1, \dots, i_p}^{j_1 \dots j_q}$, $i_1, \dots, i_p, j_1 \dots j_q = 1, \dots, n$, называются координатами (компонентами) тензора.

2. Если каждой системе координат (каждому базису) в n -мерном линейном пространстве X отнесена система n^{p+q} чисел $A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$, $i_1, \dots, i_p, j_1 \dots j_q = 1, \dots, n$, причем при переходе от одной системы координат к другой (от одного базиса к другому) эти числа преобразуются по "тензорному закону", то мы говорим, что нам задан тензор. Этот тензор называется p раз ковариантным и q раз контравариантным. Число $p + q$ называется рангом (валентностью) тензора. Сами числа $A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$, $i_1, \dots, i_p, j_1 \dots j_q = 1, \dots, n$, называются координатами (компонентами) тензора.

3. Если некоторой системе координат (некоторому базису) в n -мерном линейном пространстве X отнесена система n^{p+q} чисел $A_{i_1, \dots, i_p}^{j_1 \dots j_q}$, $i_1, \dots, i_p, j_1 \dots j_q = 1, \dots, n$, причем при переходе от этой системы координат к некоторой другой (от данного базиса к некоторому другому) эти числа преобразуются по "тензорному закону", то мы говорим, что нам задан тензор. Этот тензор называется q раз ковариантным и p раз контравариантным. Число $p + q$ называется рангом (валентностью) тензора. Сами числа $A_{i_1, \dots, i_p}^{j_1 \dots j_q}$, $i_1, \dots, i_p, j_1 \dots j_q = 1, \dots, n$, называются координатами (компонентами) тензора.

4. Если каждой системе координат (каждому базису) в n -мерном линейном пространстве X отнесена система n^{p+q} чисел $A_{i_1, \dots, i_p}^{j_1 \dots j_q}$, $i_1, \dots, i_p, j_1 \dots j_q = 1, \dots, n$, причем при переходе от одной си-

стемы координат к другой (от одного базиса к другому) эти числа преобразуются по "тензорному закону", то мы говорим, что нам задан тензор. Этот тензор называется p раз ковариантным и q раз контравариантным. Число $p + q$ называется рангом (валентностью) тензора. Сами числа $A_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}^{j_1, \dots, j_q}$, $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q = 1, \dots, n$, называются координатами (компонентами) тензора.

(Ответ: 2)

2. Какое из следующих утверждений верно?

1. $E^* = E^n$ 3. $(E^n)^* = E^n$
 2. $(E^n)^* = E$ 4. $E^* = (E^n)^*$

(Ответ: 3)

3. Укажите валентность тензора $\epsilon(u, v, \xi) = \xi(u \times v)$

1. (2, 1) 3. (1, 2)
 2. (0, 3) 4. (3, 0)

(Ответ: 3)

4. Найти сумму тензоров в V^2 , компоненты которых заданы матрицами:

$$\|A_{ij}\| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \|B_{ij}\| = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. $\begin{bmatrix} 1/2 & 5/2 \\ 2 & 5/2 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 1/2 & 5/2 \\ -3 & 5/2 \end{bmatrix}$

(Ответ: 2)

5. Дан тензор

$$\|A^{ij}\| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Найти $A^{(ij)}$.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 3/2 \\ 1/2 & 3/2 & 3 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(Ответ: 1)

В

1. Пусть $t \in T_2^1 V^2$

$$\|t_{ij}^1\| = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \|t_{ij}^2\| = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычислить компоненты тензора $t_{(ij)}^k$.

Ответ:

$$\|t_{(ij)}^1\| = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \|t_{(ij)}^2\| = \begin{bmatrix} 3 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Дан тензор $t : t(u, v) = u^1 v^1 - 2u^2 v^1 - 3u^1 v^2 + u^1 v^3$. Найти его координаты.

(Ответ: $t_{11} = t_{13} = 1, t_{12} = -3, t_{21} = -2$)

3. Найти $p = u \wedge v$ если $u = (1, 0, 1, 2), v = (0, 1, -1, 1)$.

(Ответ: $\|p^{ij}\| = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$)

С

1. Доказать, что m векторов v_1, v_2, \dots, v_m линейно зависимы в V^n тогда и только тогда, когда $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_m = 0$.

2. Определить размерность пространства кососимметричных тензоров Λ^p (или Λ_p), если $\dim V = n$.

Ответ: C_n^p

Библиографический список

- Ищук А.М. Тензорное исчисление с Maple. // Вестник БГПУ: Естественные и точные науки. 2004. №4.
- Ищук А.М. О структуре учебника по тензорному анализу и римановой геометрии в условиях многоуровневой системы образования. // Математическое образование на Алтае: Труды региональной научно-методической конференции. 2005. с 40-47.
- Малахальцев М.А., Фомин В.Е., Шапуков Б.Н., Шурьгин В.В. Задачи по тензорному анализу и римановой геометрии. Казань.: Издательство Казанского университета. 1993.
- Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.:Наука. 1970.

С.С. Маусымбаев, И.В. Павлов

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ В СПЕЦКУРСЕ "ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ"

На кафедре общей физики Семипалатинского педагогического института первые лабораторные работы с использованием компьютерных моделей были созданы в 1986 г. в рамках факультатива "Основы моделирования явлений на ЭВМ" [1]. В дальнейшем эти работы передавались в соответствующие лаборатории и к настоящему времени они широко применяются как в дополнение к обычным работам во всех практикумах по общей физике и ряде спецкурсов, так и автономно, особенно в тех случаях, когда натуральный эксперимент по каким-либо причинам практически невозможен.

Именно с подобной ситуацией сталкиваемся, например, в спецкурсе "Движение и излучение заряженных частиц в скрещенных электромагнитных полях", разработанном и внедренном с 1979 г. в учебный процесс для студентов специальности "физика" в объеме 28 часов лекционных и 28 часов практических занятий, интегрирующего курсы общей физики, теоретической физики и пр. Первоначально на практических занятиях студенты решали задачи на расчет характеристик движения заряженных частиц. Естественно, подборка задач ограничивалась трудоемкостью их решения и содержала, прежде всего, задачи, имеющие аналитическое решение.

В то же время необходимо отметить актуальность данного вопроса в современной науке и технике. Расчет характеристик движения заряженных частиц необходим при разработке и создании электронных приборов, в том числе при изготовлении микросхем, разработке ускорителей, в решении проблем, связанных с поведением плазмы, включая изучение ее в астрофизике и т.д. и т.п.

Все это потребовало постоянного расширения и усложнения, рассматриваемых в рамках спецкурса задач, что было бы невозможно без использования компьютеров и компьютерных моделей на практических занятиях. Применение компьютера позволяет не только численно решать многие достаточно сложные задачи, но и дает возможность эффективной обработки и визуализации результатов.

Теоретическая основа компьютерной модели в простом случае основана на хорошо известной

формуле силы Лоренца [2]:

$$\vec{F} = q \vec{E} + q[\vec{V} \times \vec{B}],$$

действующей на заряженную частицу с зарядом q , двигающуюся со скоростью \vec{V} в электрическом поле напряженностью \vec{E} и магнитном поле с индукцией \vec{B} .

Далее записывается уравнение движения частицы в форме 2-го закона Ньютона (нерелятивистский случай) :

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = q \vec{E} + q[\vec{V} \times \vec{B}].$$

В простейшем случае движения единственной заряженной частицы в постоянных электрическом и магнитном полях имеется аналитическое решение. Поэтому в этом случае применение компьютера сводится, прежде всего, к визуализации траектории движения частицы для полей с различной взаимной ориентацией [3].

В то же время уже здесь педагогически интересно применение имитационной модели, что позволяет студентам более глубоко понять как сущность физического явления, так и методов имитационного моделирования. Так как моделирование в нашем случае играет вспомогательную роль, позволяя более глубоко разобраться в физике явления, то может быть применена простейшая разностная схема Эйлера в виде рекуррентных соотношений, определяющих положение $\vec{r}^{\rho}(t)$ и скорость $\vec{V}^{\rho}(t)$ частицы на временной сетке с шагом Δt :

$$\vec{r}^{\rho}(t + \Delta t) = \vec{r}^{\rho}(t) + \vec{V}^{\rho}(t)\Delta t,$$

$$\vec{V}^{\rho}(t + \Delta t) = \vec{V}^{\rho}(t) + \frac{q \vec{E} + q[\vec{V}^{\rho}(t) \times \vec{B}]}{m} \cdot \Delta t.$$

Сравнивая результаты имитационной модели с известными аналитическими решениями студенты могут исследовать границы применимости имитационной модели, влияние величины временного шага Δt на точность решения.

Дальнейшее усложнение модели и решаемых с ее помощью задач может быть связано прежде всего с рассмотрением меняющихся как во времени, так и пространстве полей, для чего второе

рекуррентное соотношение представляется в виде :

$$\overset{p}{V}(t+\Delta t) = \overset{p}{V}(t) + \frac{q[\overset{p}{E}(\overset{p}{r}, t) + \overset{p}{V}(t) \times \overset{p}{B}(\overset{p}{r}, t)]}{m} \cdot \Delta t.$$

В качестве задач с практическим содержанием нами предлагается рассмотрение простейших ускорителей - линейного и циклотрона.

Следующее усложнение модели - учет релятивистских эффектов - прежде всего увеличения массы частицы с ростом ее скорости. Это позволяет рассмотреть ускорение частиц в ускорителях типа фазотрон и синхрофазотрон.

Весьма полезным как с точки зрения физических процессов, так и практических применений является рассмотрение движения нескольких частиц, с учетом их взаимодействия. В этом случае возможно наблюдение ряда интересных физических явлений, например, таких как : синхронизация "сгустков" частиц в ускорителях, "самофокусировка" пучков, моделирование коллайдеров как циклических, так и линейных и т.п. Также возможно изучение задач, связанных с движением частиц в веществе, например, физических процессов взаимодействия носителей заряда в полупроводниках, возникновение эффекта Холла.

Усложнение модели дополнением модуля учета излучения электромагнитных волн заряженными частицами, двигающимися с ускорением [2], позволяет рассматривать целый ряд интересных, но достаточно сложных задач [4]. Например, движение заряженных частиц космических лучей в магнитном поле Земли, синхротронное излучение и ограничение верхнего предела энергии, до которого могут быть ускорены электроны в бетатроне, возникновение тормозного рентгеновского излучения, излучения Вавилова-Черенкова, переходного излучения, возникающего при переходе равномерно двигающихся частиц из одной среды в другую.

Учет излучения дает возможность моделирования электронных мазеров на циклотронном резонансе, широко применяемых в физических экспериментах, новых технологиях и медицине, а также мазеров в космических условиях, достаточно типичных для планетных и звездных магнитосфер. Космические циклотронные мазеры служат источником макроволн, определяя уровень низкочастотного электромагнитного излучения и регулируя количество заряженных частиц высоких энергий в околопланетном пространстве.

Следует отметить, что к этому моменту удобно в модели представлять выражение силы

Лоренца через электромагнитные потенциалы. Ускорение частицы определяется с учетом зависимости массы от скорости и далее используется для вычисления потерь энергии частицей на излучение и, с учетом этого, для нахождения изменения скорости.

Наибольшую сложность модель движения заряженных частиц приобретает при введении в нее квантовых эффектов [2]. Этот вариант сегодня находится в стадии разработки - подборке и уточнении как круга подлежащих рассмотрению явлений, так и в методах и способах реализации компьютерных моделей.

Для эффективной работы студентов им предоставляется набор готовых программных модулей в виде исходников, содержащих как различные по сложности физические модели и различные численные схемы, так и модули обработки, анализа и визуализации результатов, что позволяет варьировать сложность заданий, в том числе в зависимости от уровня подготовки студента.

Разработанные программные модули позволяют студентам эффективно управлять работой моделей в интерактивном режиме, сохранять все необходимые параметры конкретной реализации модели, обрабатывать их и отображать результаты на экране монитора в наглядном и удобном для восприятия виде. Компьютерное моделирование позволяет варьировать временной масштаб событий и моделировать ситуации, практически не реализуемые в натуральных физических экспериментах, особенно в условиях выших учебных заведений.

В заключение отметим, что практические занятия с компьютерными моделями реально могут использоваться, так же как и обычные лабораторные работы и могут быть рассчитаны на выполнение в течение одной или двух пар, в зависимости от сложности задания. При этом за время занятия студенты успевают неоднократно провести компьютерный эксперимент с различными параметрами модели, провести необходимую, в том числе статистическую обработку результатов и визуализировать их с помощью компьютера. Работа студентов-физиков упрощается в математическом отношении и сводится, прежде всего, к физике - к объяснению полученных результатов, оценке их точности и т.п. При этом поэтапное включение в рассмотрение дополнительных факторов, постепенно усложняющих модель и приближающих ее к реальному физическому явлению, предоставляет богатые возможности для понимания и усвоения студентами физической сущности исследуемых явлений.

Библиографический список

1. Павлов И.В. Факультативный курс "Основы моделирования явлений на ЭВМ" Сборник тезисов Республиканского совещания-семинара "Использование ЭВМ в учебной и научно-исследовательской работе студентов". Новосибирск. 1988. С.57-58.
2. Левич В.Г. Курс теоретической физики, том 1,2. М: Наука. 1969.
3. Джумагулова К.Н., Оскомов В.В., Пшиков М.И., Мукушева М.К., Маусымбаев С.С., Гайнова Л.Е. Лабораторный практикум по атомной физике - Курчатов. 2001. 110 с.
4. Маусымбаев С.С., Воронцов В.И. Излучение электронов в однородном магнитном и электрическом поле параболического конденсатора. Известия АН Каз.ССР. изд-во "Наука". №2. г.Алматы. 1980.

ИЗ ОПЫТА ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ НЕРАВЕНСТВ

Совершенствование содержания математического образования подчинено активизации познавательной деятельности студентов, воспитанию у них навыков самостоятельной работы, развитию их умственных способностей и интереса к предмету, формированию активной личности.

Одной из форм математической деятельности студентов является решение задач, результативность которой значительно повышается, если студентам предлагаются задачи на доказательство. Они побуждают студентов активно работать, а не выполнять решение механически, без всякого усилия мысли. Но поиски доказательства часто вызывают у них затруднения.

В течение многих лет в элементарной математике рассматриваются задачи на доказательство неравенств. Рассмотрим наиболее типичные ошибки, которые допускают студенты в своих рассуждениях.

Выявляют не все условия, вытекающие из задания.

Например, в задании найти наибольшее значение функции $y = \frac{x}{ax^2+b}$, если $a > 0$, $b > 0$ многие студенты не учитывают, что следует рассматривать лишь положительные значения x .

Не обращают внимание на условия, при которых выполняется применяемое для доказательства известное неравенство. Так, неравенство Коши записывают в виде: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, не учитывают, что оно выполняется для тех a и b , которые неотрицательны.

Приступая к доказательству неравенства, студенты не всегда осмысливают выбор применяемого ими метода доказательства, что ведет к неверным рассуждениям.

Например, доказательство неравенства $|\cos\alpha| + |\sin\alpha| \geq 1$ (1) многие студенты проводят следующим образом: возводят в квадрат обе части данного неравенства. В результате получают неравенство вида:

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha + 2|\sin\alpha||\cos\alpha| + \sin^2\alpha &\geq 1 \\ 2|\sin\alpha||\cos\alpha| &\geq 0 \\ |\sin 2\alpha| &\geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

При этом не аргументируют, почему обе части неравенства (1) можно возвести в квадрат и

на каком основании можно сделать заключение, что из неравенства (2) следует, что неравенство (1) является верным для любых α .

Студенты не всегда следят за равносильностью выполняемых ими преобразований.

У некоторых студентов вызывает затруднение переформулировка задания. Например, задачу доказать, что наибольшее значение функции $x(1-x)$ равно $\frac{1}{4}$ целесообразно сформулировать так: доказать, что наибольшее значение функции $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

Исходя из анализа приведенных наиболее типичных ошибок, допускаемых студентами при доказательстве неравенств, для предупреждения и устранения их рекомендуем:

1. Включить в условие все данные, вытекающие из задания. Иногда целесообразно из данного условия вывести очевидное следствие или условие, заменить другим, ему равносильным, но так, чтобы из этого преобразованного условия можно было легче усмотреть доказательство или из него непосредственно следовало доказательство неравенства.

2. Рассматривая заключение в некоторых случаях стараться заменить его таким, которое легче выводится из условия данного неравенства или из которого заключение вытекает как следствие.

3. Пытаться в случае необходимости переформулировать задание.

4. Знать различные методы доказательства неравенств, уметь их применять.

В литературе рассматриваются в основном следующие методы:

- доказательство с помощью определения неравенств;
 - синтетический метод;
 - аналитико-синтетический метод;
 - метод от противного;
 - метод математической индукции
- [1, гл. I, §5], [2, гл. I, §4], [3 гл. II, §8]

В некоторых случаях целесообразно использовать метод замены данных величин другими. Например, в задании доказать, что для любых действительных чисел a_1, a_2, b_1, b_2 , удовлетворяющих условию $\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 = 1, \\ b_1^2 + b_2^2 = 1 \end{cases}$ (1) справедливо неравенство $|a_1b_1 + a_2b_2| \leq 1$ целесообразно заменить условие (1) другим, ему равносиль-

ным. Согласно условия (1) существуют углы α и β , для которых $\cos\alpha = a_1, \sin\alpha = a_2, \cos\beta = b_1, \sin\beta = b_2$. Тогда

$$\begin{aligned} |a_1b_1 + a_2b_2| &= |\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta| = \\ &= |\cos(\alpha - \beta)| \leq 1 \end{aligned}$$

ч.т.д.

Не уделяется должного внимания в литературе нестандартному методу доказательства неравенств, применение которого требует от студентов для поиска доказательства провести аналогию с доказательствами ранее известных утверждений, выявить математическую закономерность, актуализировать свои знания.

Рассмотрим доказательство неравенства

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 2$$

нестандартным методом, хотя его можно доказать методом математической индукции.

Так как $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, где $k = 2, 3, \dots$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2} &< \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3^2} &< \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{n^2} &< \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \end{aligned} \tag{2}$$

Складывая неравенства (2) с равенством $\frac{1}{1^2} = 1$, получим

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

ч.т.д.

5. Приступая к доказательству неравенства, необходимо выбрать метод доказательства или комбинацию нескольких методов, чтобы избежать ошибочных рассуждений.

6. Выбирать наиболее рациональный метод доказательства неравенства.

7. Выполнять задания, в которых требуется

- а) найти ошибку в приведенном доказательстве;
- б) выяснить, верно ли доказано неравенство;
- в) найти наиболее рациональный способ доказательства данного неравенства.

Перечисленные рекомендации содействуют выработке у студентов творческой активности, развитию навыков самостоятельного поиска ответа на вопрос, на который нет прямого ответа в лекциях и учебной литературе.

Библиографический список

1. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике. М.: Просвещение. 1991.
2. Вересова Е.Е., Денисова Н.С., Полякова Т.Н. Практикум по решению математических задач. М.: Просвещение. 1979.
3. Шувалова Э.З., Агафонов В.Г., Богатырев Г.И. Повторим математику, изд.2. М.:Высшая школа. 1974.

ОСОБЕННОСТИ УЧЕТНОЙ ПОЛИТИКИ БЮДЖЕТНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ В ПЕРИОД РЕФОРМИРОВАНИЯ БУХГАЛТЕРСКОГО УЧЕТА

2005 год стал первой ступенью в реформировании бухгалтерского учета в бюджетной сфере. Реформирование бухгалтерского учета - это не обычные изменения и уточнения, а переход на новую систему учета. Принятие ряда новых правовых документов, предусматривающих новые механизмы функционирования бюджетной системы и построения бюджетного процесса, обусловили фундамент для проведения революции в учете.

В 2004 году были внесены изменения в Бюджетный кодекс РФ, закрепленные Федеральным законом от 20 августа 2004 года № 120-ФЗ "О внесении изменений в Бюджетный кодекс Российской Федерации в части регулирования межбюджетных отношений". Указанными изменениями внесены совершенно новые понятия: расходные обязательства и бюджетные обязательства, уточнено понятие "бюджет". Бюджет определяется как "форма образования и расходования денежных средств, в расчете на финансовый год, предназначенных для исполнения расходных обязательств" соответствующего муниципального образования: субъекта Российской Федерации, Российской Федерации. Из этих определений видно, что в данных понятиях акцент направлен не на политическую характеристику, а на экономическую и правовую, в основе которых лежит понятие "обязательства".

Концепция реформирования бюджетного процесса в Российской Федерации в 2004-2006 годах, одобренная Постановлением Правительства РФ от 22 мая 2004 года № 249 "О мерах повышения результативности бюджетных расходов" определила суть этой реформы, которая является переходом от "управления бюджетными ресурсами (затратами)" к "управлению результатами" путем повышения ответственности и расширения самостоятельности участников бюджетного процесса. Создается механизм реализации провозглашенного в Бюджетном кодексе РФ принципа эффективности использования бюджетных средств через механизм бюджетных программ, которые должны иметь конкретные результаты. Бюджетный процесс должен быть построен в соответствии с принятой международной политикой. Бюджетная реформа направлена на достижение эффективности путем бюд-

жетирования на результат; стабильности, при осуществлении среднесрочного планирования; прозрачности через реформу бюджетного учета; качественного управления, управления бюджетом.

Определены основные направления реформирования бюджетного процесса:

- Реформирование бюджетной классификации РФ и бюджетного учета;
- Выделение бюджетов действующих и принимаемых обязательств;
- Совершенствование среднесрочного финансового планирования;
- Совершенствование и расширение применения программно - целевых методов бюджетного планирования;
- Упорядочение процедур составления и рассмотрения бюджета.

На реализацию указанных положений бюджетной реформы направлены :

- Инструкция по бюджетному учету, утвержденная приказом Минфина России от 26 августа 2004 года № 70н;
- Инструкция о порядке составления и предоставления годовой, квартальной и месячной бюджетной отчетности, утвержденная приказом Минфина России от 21 января 2005 года № 5н;
- Приказ Минфина от 10.12.2004г. № 114н "Об утверждении Указаний о порядке применения бюджетной классификации Российской Федерации".

Еще в 2002 году, в Послании Президента РФ "О бюджетной политике в 2003 году" были определены основные критерии новой системы бюджетного учета:

- Интеграция с бюджетной классификацией;
- Объединение учета исполнения бюджета и учета в бюджетных учреждениях;
- Использование метода начислений.

24 мая 2005 года, в Бюджетном Послании Федеральному Собранию Российской Федерации, Президент определил основные направления и ориентиры бюджетной политики в 2006 году. Главная цель Бюджетного послания Президента

Российской Федерации - это обеспечение макроэкономической устойчивости России. Послание дает оценку проведения бюджетной политики в 2004 году и начале 2005 года. Назван ряд проблем, требующих решения. Среди них:

- Улучшение налогового климата для ответственного бизнеса;
- Реализация долгосрочных проектов;
- Упрощение рассмотрения проекта федерального бюджета;
- Совершенствование механизма государственных закупок

и ряда других проблем.

В послании ставится ряд задач на 2006-й год и в перспективе на несколько лет. Приоритетной задачей является обеспечение макроэкономической устойчивости, последовательного снижения уровня инфляции. Особое место в послании посвящено налоговой политике. Прилагается ряд мер для совершенствования налоговой системы. Определены основные приоритеты бюджетных расходов. В части межбюджетных отношений при проведении реформ предложено оказывать помощь субъектам Российской Федерации. Предлагается оказать помощь по оздоровлению бюджетов Субъектов Федерации.

Правительством РФ, на основании постановления Правительства от 6 марта 2005 года № 118 "Положение о разработке перспективного финансового плана Российской Федерации, проекта федерального закона на очередной финансовый год", проекта федерального закона о федеральном бюджете на 2006 год и Сводного доклада о результатах и основных направлениях деятельности Правительства Российской Федерации, одобрен график разработки перспективного финансового плана Российской Федерации на 2006-2008 годы.

В целях обеспечения выполнения поставленных задач каждое бюджетное учреждение должно наметить план выполнения поставленных перед ним задач. Для принятия к исполнению: Инструкции по бюджетному учету, утвержденной приказом Минфина России от 26 августа 2004 года № 70н; Инструкции о порядке составления и предоставления годовой, квартальной и месячной бюджетной отчетности, утвержденной приказом Минфина России от 21 января 2005 года № 5н; Приказа Минфина от 10.12.2004г. № 114н "Об утверждении Указаний о порядке применения бюджетной классификации Российской Федерации", которые вступили в действие с 1 января 2005 года, необходимо провести ряд организационных мероприятий:

- Издать приказ о переходе на бюджетный учет;
- Утвердить рабочий план счетов;
- Разработать таблицу переноса сальдовых остатков по состоянию на 1 января 2005 года;
- Разработать учетную политику по внедрению бюджетного учета в 2005 году.

Переход на новую Инструкцию по бюджетному учету осуществлялся в течении 9 месяцев - до 1 октября 2005 года.

Руководствуясь Федеральным законом "О бухгалтерском учете" от 21 ноября 1996 года № 129-ФЗ (в редакции от 23.07.98г.), в связи с изменениями законодательных и нормативных актах, с вводом в действие вышеназванных инструкций и постановлений, в соответствии с требованиями налогового законодательства, в целях установления методики учета и расчета налоговой базы, отражающей деятельность учреждения руководитель бюджетного учреждения должен подписать приказ об учетной и налоговой политике.

ПРИКАЗ

Установить с 2005 года учетную и налоговую политику "*Наименование организации*"

1. Бухгалтерский учет осуществлять в соответствии с нормативными документами: Федеральным законом "О бухгалтерском учете";

- Инструкцией по бюджетному учету, утвержденной приказом Минфина России от 26 августа 2004 года № 70н;
- Инструкцией о порядке составления и предоставления годовой, квартальной и месячной бюджетной отчетности, утвержденной приказом Минфина России от 21 января 2005 года № 5н;
- Приказом Минфина от 10.12.2004г. № 114н "Об утверждении Указаний о порядке применения бюджетной классификации Российской Федерации"

1.1 При ведении бухгалтерского учета, исполнения сметы доходов и расходов по бюджетной, предпринимательской и иной приносящей доход деятельности применять рабочий план счетов,

утвержденный Инструкцией по бюджетному учету, утвержденной приказом Минфина России от 26 августа 2004 года № 70н;

1.2 По учету движения бюджетных средств, целевых и средств от предпринимательской и иной деятельности применять мемориально-ордерную форму учета.

1.3 Тожество данных аналитического учета оборотам и остаткам по счетам синтетического учета осуществлять на последний календарный день каждого месяца.

1.4 За правильность отражения хозяйственных операций в регистрах бухгалтерского учета несут лица, составившие их. Формы первичной документации, их периодичность и порядок составления определяется в прилагаемом к учетной политике графике - документооборота .

1.5 При обработке учетной информации на всех участках учета по бюджетным и внебюджетным средствам применять автоматизированную систему учета. При необходимости, для детализации отдельных объектов учета, проведение анализа финансово - хозяйственной деятельности, ввести дополнительный учет в ручную.

1.6 При использовании компьютерной техники обеспечить хранение информации, как на магнитных носителях, так и бумажными копиями, с обязательным их архивированием на дискеты и распечатыванием на бумажные носители не реже чем 1 раз в месяц.

1.7 Главному бухгалтеру обеспечивать применение в бухгалтерском учете унифицированных форм, утвержденных Госкомстатом, а т.ж. самостоятельно разработанных первичных документов, по которым не предусмотрены типовые формы, с обязательным их утверждением приказом. Требования главного бухгалтера в части порядка оформления и предоставления в бухгалтерию необходимых документов и сведений являются обязательными для всех работников учреждения.

1.8 Сроки предоставления отчетности определяются Инструкцией о порядке составления и предоставления годовой, квартальной и месячной бюджетной отчетности, утвержденной приказом Минфина России от 21 января 2005 года № 5н.

Бухгалтерский отчет составлять на основании данных аналитического и синтетического учета по формам и в объеме, утвержденных Минфином России, и в сроки, установленные Минобразования России и налоговым законодательством.

2. Бухгалтерский учет в университете осуществлять бухгалтерией, являющейся структурным подразделением , возглавляемым главным бухгалтером.

2.1 Главный бухгалтер подчиняется непосредственно руководителю - ректору университета и несет ответственность за соблюдение учетной политики и ведение бухгалтерского учета, своевременное предоставление бухгалтерской отчетности. Правила и обязанности главного бухгалтера определены статьей 7 Федерального Закона "О бухгалтерском учете".

2.2 Ответственность за организацию бухгалтерского учета, соблюдение действующего законодательства при выполнении финансово-хозяйственных операций и хранение бухгалтерской документации несет ректор и главный бухгалтер университета.
Основание: п.1 ст.6 "Закона о бухгалтерском учете".

2.3 Учет исполнения сметы расходов по бюджету, по предпринимательской и иной деятельности, приносящей доход осуществлять экономистом планового отдела с подчинением начальнику планового отдела. Учет расходов целевых средств осуществлять бухгалтером по внебюджетной деятельности, налоговый учет возложить на бухгалтера по налоговому учету, подчиняющихся непосредственно главному бухгалтеру.

Учет расходов доходов от внебюджетной деятельности организовать в разрезе источников доходов и целевых статей расходов в соответствии со сметами.

2.4 Установить, что сумма средств, выданных в подотчет на командировочные цели, должна соответствовать строго обоснованному расчету, а на хозяйственные цели определяются ректором, но не более 60 тысяч рублей.

Установить срок отчетности по командировочным расходам на территории России и за рубежом 3 дня после прибытия из командировки.

Денежные средства на хозяйственные и учебные цели выдавать из кассы материально ответственным лицам, определенным приказом ректора.

Срок отчетности по авансам, выданным на хозяйственные и учебные цели устанавливаются ректором при подписании заявки на выдачу наличных средств.

2.5 К бланкам строгой отчетности отнести бланки:

- трудовые книжки и вкладыши к ним;
- дипломы;
- зачетные книжки;
- студенческие билеты;
- доверенности; квитанции, бланки на прием наличных средств от населения.

Ответственные за учет, хранение и выдачу бланков строгой отчетности определяются приказом ректора.

2.6 Право подписи доверенности на получение товарно-материальных ценностей предоставить: руководителю, в его отсутствие заместителям, главному бухгалтеру, заместителю главного бухгалтера, подписи которых заверены на банковских карточках.

Установить контроль за правильностью ведения книги регистрации доверенностей на ведущего бухгалтера материальной группы, руководящего этим отделом.

Установить предельные сроки :

- 10 дней использования доверенностей
- 3 дня отчетности по доверенности.

2.7 В целях обеспечения достоверности данных бухгалтерского учета и отчетности производить инвентаризацию имущества и финансовых обязательств в следующие сроки

- Основные средства, здания, сооружения, передаточные устройства, многолетние насаждения - 1 раз в 3 года на 1 октября;
- Библиотечные фонды - 1 раз в 5 лет;
- Все другие основные средства - 1 раз в 2 года на 1 октября;
- Малоценные и быстроизнашивающиеся предметы - 1 раз в год на 1 октября;
- Материальные запасы - 1 раз в год на 1 октября;
- Продукты питания, спирт - 1 раз в три месяца;
- Касса – ежемесячно в разные дни;
- Финансовые вложения, незавершенное строительство, расчеты - 1 раз в год на 1 января.

Для проведения инвентаризации имущества и финансовых обязательств, а также внезапных проверок кассы создать комиссии, которые утвердить ректором.

2.8 Без подписи главного бухгалтера денежные и расчетные документы, финансовые и кредитные обязательства считать недействительными и не принимать к исполнению.

2.9 Бухгалтерии и плановому отделу обеспечить учет исполнения смет расходов по федеральному бюджету, расходов за счет других бюджетов в разрезе целевых статей федерального бюджета по кодам экономической классификации.

Обеспечить контроль за правильным, экономным и целевым использованием бюджетных и внебюджетных средств.

2.10 Способы ведения бухгалтерского учета, избранные организацией при формировании учетной политики, применять с первого января года, следующего за годом утверждения приказа по учетной политике.

3. Утвердить следующую методику бухгалтерского учета, данные которого являются основой для формирования налоговой базы.

3.1 К основным средствам относятся материальные объекты, используемые в процессе деятельности университета независимо от стоимости со сроком полезного использования более 12 месяцев.

3.2 Расчет годовой суммы амортизации основных средств и нематериальных активов производится линейным способом исходя из первоначальной (восстановительной) стоимости основных средств и нематериальных активов и нормы амортизации, исчисленной исходя из срока полезного использования этого объекта.

При начислении амортизации, в случае приобретения основных средств за счет чистой прибыли, полученной от предпринимательской и иной деятельности приносящей доход, стоимостью свыше 10000 рублей, применять линейный метод.

Амортизация на основные средства приобретенные за счет бюджетных средств и средств носящих целевой характер, а также приобретенных до 1 января 2002 года, независимо от источников их приобретения, бюджетными не начисляется.

3.4 Переоценку основных средств производить только на основании Постановлений Правительства России.

3.5 Фактическую стоимость израсходованных материалов производить по ценам их приобретения или средним ценам, а фактическую стоимость израсходованных материалов на выполнение договорных работ - по фактическим затратам.

3.6 К материальным запасам относятся:

- предметы, используемые в деятельности учреждения в течении отчетного периода, превышающего 12 месяцев, но не относящиеся к основным средствам в соответствии с классификацией ОКОФ;
- предметы, используемые в деятельности учреждения в течении отчетного периода, не превышающего 12 месяцев, не зависимо от их стоимости.

3.7 Для исчисления налога на прибыль выручку от оказания услуг определять по методу начисления. Датой оказания услуг считать дату передачи права собственности и дату окончания предоставления услуг.

3.8 К предпринимательской и иной деятельности приносящей доход отнести:

- доходы от коммерческих услуг библиотеки;
- доходы от оказания хозяйственных, ремонтно-строительных услуг;
- доходы от оказания посреднических услуг;
- торговля покупными товарами;
- научно-исследовательская работа финансируемая не из средств бюджетов;
- ведение внереализационных операций приносящих доход;
- приобретение акций, облигаций и других ценных бумаг за счет собственных средств.

3.9 Не включаются в налоговую базу доходы и расходы от сдачи имущества в аренду, находящегося в федеральной собственности, так как Закон о бюджете предусматривает направление дохода от аренды такого имущества на пополнение бюджетного финансирования.

3.10 Не включаются в налоговую базу целевые поступления на осуществление уставной деятельности университета в виде спонсорской или благотворительной помощи, а т.ж. пожертвований.

4. Особенности определения налоговой базы при исчислении налога на прибыль.

4.1 Налоговый период по налогу на прибыль - год, отчетные периоды - первый квартал, полугодие и девять месяцев календарного года (ст. 285 НК РФ).

4.2 Методом признания доходов и расходов для целей налогообложения считать метод начисления.

Порядок признания доходов при методе начисления осуществлять в соответствии со ст. 271 НК РФ. Доходы признаются в том отчетном периоде, в котором они имели место, независимо от фактического поступления денежных средств, иного имущества (работ, услуг) и (или) имущественных прав.

4.3 Сумма выручки от реализации определяется в соответствии со статьей 248 НК РФ с учетом положений статьи 271 НК РФ на дату признания доходов и расходов в соответствии с методом начисления.

4.4 Моментом перехода права собственности является дата обговоренная условиями договора.

4.5 Доходы от реализации продукции (работ, услуг) включаются в объект налогообложения по налогу на прибыль по дню их передачи, в качестве которого согласно пункту 1 статьи 39 НК РФ применяется день перехода права собственности от продавца к покупателю.

Начисление платы за обучение производить равномерно: один раз в год, по окончанию учебного курса.

4.6 Внереализационные доходы включать в объект налогообложения по налогу на прибыль в порядке определенном пунктом 4 статьи 271 НК РФ

4.7 Суммовые разницы включать в объект налогообложения по налогу на прибыль в порядке, определенном пунктом 7 статьи 271 НК РФ.

4.8 Не включаются в объект налогообложения по налогу на прибыль доходы, перечисленные в статье 251 НК РФ.

5. порядок формирования суммы доходов, включаемых в налогооблагаемую базу по налогу на прибыль.

5.1 Доходы, включаемые в объект налогообложения по налогу на прибыль, определять в порядке, установленном статьями 248-250 НК РФ, и включает в себя непосредственно доходы от реализации товаров (работ, услуг) и имущественных прав, а также внереализационные доходы.

5.2 Перечень внереализационных доходов определен статьей 250 НК РФ.

5.3 Утвердить формы налоговых регистров по доходам (приложение №1,2):

- Форма №1 - по доходам от реализации товаров, работ, услуг;
- Форма № 2 - по доходам от внереализационных операций.

6. Порядок формирования суммы расходов, уменьшающих налоговую базу по налогу на прибыль.

6.1 Порядок признания расходов при методе начисления осуществлять в соответствии со статьей 272 НК РФ, расходы признаются таковыми в том отчетном (налоговом) периоде, к которому они относятся, независимо от времени фактической выплаты денежных средств и (или) иной формы их оплаты.

6.2 Перечень расходов, связанных с производством и реализации продукции (работ, услуг), определяется с учетом положений статьей 253-264 НК РФ, внереализационные расходы согласно статьи 265 НК РФ.

6.3 Расходы на производство и реализацию определяются в соответствии со статьей 253 НК РФ с учетом положений статьи 318 НК РФ.

6.4 Внереализационные расходы определяются в соответствии со статьей 265 НК РФ. Внереализационные расходы принимаются в уменьшение налогооблагаемой базы по налогу на прибыль согласно срокам, определенным пунктом 7 статьи 272 НК РФ.

6.5 Предусматриваются правила признания таких расходов, как:

- материальных затрат - в части оценки материально произведенных запасов при их оприходовании (пункты 2-4 статьи 254 НК РФ) и списании (пункт 6 статьи 254 НК РФ).

- Амортизация объектов основных средств и нематериальных активов - в части их оценки при приобретении или получении (ст.257 НК РФ) и списании (п.6 ст.254 НК РФ).

- На ремонт основных средств (ст.260 НК РФ)

- Расходов на научные исследования (ст.262 НК РФ)

6.6 Расходы признаются в таком же порядке, как и доходы в целях налогообложения по методу начисления, независимо от времени фактической выплаты денежных средств и иной формы оплаты.

6.7 Определить состав расходов по видам деятельности:

- расходы на оплату труда в соответствии со ст. 255 НК РФ.(Основанием для оплаты труда служат коллективный договор и положение об оплате труда);

- материальные расходы, связанные с изготовлением продукции, выполнением работы или оказания услуги (основанием служат акты на списание материалов, израсходованных на изготовление продукции, работ или услуг в соответствии со ст. 254 НК РФ);

- суммы начисленной амортизации.

6.8 Ведение учета доходов и расходов целевых поступлений, а также сумм доходов и расходов от иной деятельности производить раздельно.

7. Правила распределения прямых расходов в уменьшение налогооблагаемой базы по налогу на прибыль в части относимых к незавершенному производству, нерезализованной готовой продукции и отгруженных товаров.

7.1 При признании доходов по методу начисления производственные расходы принимаются в уменьшение налогооблагаемой базы в следующем порядке:

- по нематериальным расходам- дата передачи в производство материалов и сырья (в части приходящихся на выполнение основного вида деятельности), а также дата подписания акта приемки-передачи услуг (работ);

- по амортизации - ежемесячно исходя из начисленной суммы;

- по расходам на оплату труда - ежемесячно исходя из суммы начисленных выплат и иных расходов;
- по расходам на ремонт основных средств - согласно отчетным периодам, в которых они были произведены, с учетом положений ст.260 НК РФ;
- по расходам на добровольное и обязательное страхование (негосударственное пенсионное обеспечение) - согласно отчетным (налоговым) периодам, в которых в соответствии с условиями договора организацией были переведены (выданы из кассы) денежные средства на оплату страховых (пенсионных) взносов. (При этом разовые платежи по договорам, заключенным на срок более одного налогового периода, принимаются в уменьшение налогооблагаемой базы равномерно в течение срока действия договора).

8. Правила определения суммы задолженности по расчетам с бюджетом по налогу на прибыль.

8.1 Налоговая база определяется в порядке, установленном ст.274 НК РФ.

8.2 Налоговые ставки установлены статьей 284 НК РФ.

8.3 Согласно ст.286 НК РФ квартальные авансовые платежи по налогу на прибыль уплачивать исходя из ставок налога и фактически полученной налоговой базы, рассчитанной нарастающим итогом с начала налогового периода до окончания соответственно первого квартала, полугодия, девяти месяцев и года.

8.4 Уплату сумм ежеквартальных платежей производить в соответствии с п.1 ст 287 НК РФ в следующие сроки:

- по итогам налогового периода, то есть календарного года - не позднее 28 марта следующего года;
- квартальные авансовые платежи - не позднее срока, установленного для подачи налоговых деклараций за соответствующий период, то есть не позднее 28 дней со дня окончания соответствующего отчетного квартала.

9. О назначении должностных лиц, ответственных за организацию и ведение налогового учета.

Назначить ответственным лицом за ведение налогового учета при исчислении и уплаты налога на прибыль ведущего бухгалтера материальной группы.

10. Утвердить формы используемых первичных учетных документов, аналитических регистров налогового учета, а также расчетов налоговой базы (приложения 1-7).

11. Налог на добавленную стоимость.

11.1 В рамках учетной политики, регулирующей вопросы налогообложение по налогу на добавленную стоимость, согласно положениям главы 21 Налогового кодекса РФ, признать момент определения налоговой базы в целях исчисления налога на добавленную стоимость по мере отгрузки и предъявлении покупателю расчетных документов - день отгрузки (передачи) товаров, работ, услуг.

11.2 От начисления НДС освобождаются виды услуг предусмотренные ст. 149 НК РФ.

11.3 Применять ставки НДС по видам доходов:

- услуги библиотеки - 10 % от суммы разницы между ценой продажи и приобретения;
- внелицензионная деятельность, приносящая доход - 18%.

11.4 Ответственными за подписание счетов-фактур назначить: Ф.И.О., должность

11.5 Распределение НДС .

Если одни и те же товары (работы, услуги), основные средства и нематериальные активы используются в производстве как облагаемой, так и необлагаемой НДС продукции (работ, услуг), то входной НДС выделяется на отдельный субсчет счета 30304, а затем в соответствии с п.4 ст.170 НК РФ применяется к вычету по пропорции.

11.6 Для облагаемых НДС операций применяются к вычету суммы НДС в соответствии со ст.172 НК РФ.

12. Транспортный налог.

12.1 Порядок исчисления и уплаты транспортного налога устанавливается главой 28 НК РФ.

13. Налог на имущество.

13.1 Порядок исчисления налога осуществляется согласно главы 30 НК РФ.

Руководитель _____ / Ф.И.О. /

Приложение 1

Форма №1

Накопительный реестр доходов от реализации продукции, работ, услуг за _____ месяца 200__ года

Вид операции	Оборот с кредита субсчетов					Доходы	
	40101 в дебет счетов					Итого	Нарастающим итогом
С начала года							
Платные образовательные услуги							
Общезнание /№1/							
Общезнание студентов							
Услуги библиотеки							
Курсовые мероприятия							
Редакция							
Аспирантура							
Итого за месяц							
Итого нарастающим итогом							

Подпись ответственного лица _____ / _____ /

Приложение №2

Форма №2

Накопительный реестр внереализационных доходов
За _____ месяца 2000__ года

Наименование операций	Оборот по кредиту		Внереализационные Доходы	
С начала года				
Доходы от вложений в ценные бумаги				
Итого с начала месяца				
Итого с начала года				

Подпись ответственного лица _____ / _____ /

Приложение № 3

Форма №3

Накопительный реестр по учету списанной кредиторской задолженности за счет средств, включаемых в облагаемые доходы при исчислении налога на прибыль за _____ год.

Дата списания	Основание по каждому документу	Наименование организации – кредитора	Сумма
Итого			

Подпись ответственного лица _____ / _____ /

Приложение № 4

Форма №4

Накопительный реестр доходов за 200__ год

Отчетный период	Выручка от реализации						Всего
1							
2							
3							
Итого за 1 квартал							
4							
5							
6							
Итого за 2 квартал							
7							
8							
9							
Итого за 3 квартал							
10							
11							
12							
Итого за 4 квартал							
Всего за год							

Подпись ответственного лица _____ / _____ /

Приложение № 5

Форма №5

Накопительный реестр расходов по реализации продукции, работ, услуг за _____ месяца 200__ года

Дата	Наименование организации	Оборот по дебету субсчета 40101 с кредита счетов 10604		Списано расходов	
				Итого	Нарастающим итогом
	С начала года				
	Итого за месяц				
	Всего за год				

Подпись ответственного лица _____ / _____ /

РЕФЕРАТЫ

МАТЕМАТИКА

А.А. Дудкин

Ортоцентрический симплекс и выход в объемлющее пространство

В данной работе рассматривается обобщение некоторых свойств треугольника и тетраэдра на случай симплекса многомерного евклидова пространства.

Л.А. Завьялова

Преобразование O_δ - множеств при инверсии

Определение O_δ -множества было введено Ю.Г. Решетняком в статье «Об одном обобщении выпуклых поверхностей». Изучаемые множества характеризуются тем свойством, что каждой граничной точки множества можно коснуться шаром данного радиуса $\delta > 0$, причем внутри этого шара точек множества нет. В статье рассмотрены O_δ -множества в n -мерном евклидовом пространстве.

А.С Кузьмина

Об армендеризовских и косых армендеризовских колец

В настоящей работе исследуются армендеризовские и косые армендеризовские групповые кольца. Получены некоторые результаты для групповых колец над полем и групповых колец абелевых групп без кручения. Также исследованы косые армендеризовские кольца с присоединенной единицей. Кроме того, удалось доказать, что редуцированное и α -косое армендеризовское кольцо R (α – мономорфизм кольца R) является α -жестким.

В.А Кыров

Формулы Герона некоторых феноменологически симметричных геометрий

Под формулой Герона в евклидовой геометрии понимается площадь треугольника, выраженная через длины его сторон. В данной работе решением функциональных уравнений находятся формулы Герона плоскости Евклида и Минковского, а также собственно гельмгольцевой, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей.

Г.Г. Михайличенко

Групповой аналог классификационных задач в теории физических структур

Г.Гельмгольц в его знаменитой работе "О фактах, лежащих в основании геометрии" высказал предположение, что метрика n -мерного пространства не может быть произвольной, если в нем твердое тело имеет $n(n+1)/2$ степеней свободы. Но в таком случае между всеми взаимными расстояниями для $n+2$ точек твердого тела должна существовать функциональная связь, так как при ее отсутствии число степеней свободы $(n+2)$ -точечной жесткой фигуры с общим расположением точек, движение которой однозначно определяет движение всего твердого тела, уменьшится ровно на единицу. Таким образом, в n -мерной геометрии обнаруживает себя не только групповая симметрия, лежащая в основе "Эрлангенской программы" Ф.Клейна, но и феноменологическая симметрия, на которую впервые особое внимание обратил Ю.И.Кулаков, сделав ее основным принципом своей теории физических структур. Данная работа посвящена групповому аналогу некоторых классификационных задач в теории физических структур.

И.В. Поликанова

Верхние и нижние пределы многозначных отображений в пространствах с аксиомами счетности

В данной работе исследуются новые свойства пределов, обусловленные введением аксиом счетности в топологическое пространство.

А.Е. Раков.

Перечисление многогранников

Данная статья посвящена проблеме перечисления многогранников, в ней рассмотрены основные факты по этой проблеме, приведены последние результаты исследований этой темы, предложен алгоритм поиска многогранников, высказана гипотеза о критерии изоморфности двух графов.

Е.Д. Родионов, В.В. Славский

Дифференциальные операторы на группе Гейзенберга

В данной работе исследуются дифференциальные операторы градиента и Лапласа на группе Гейзенберга с левоинвариантной лоренцевой метрикой.

А.С. Сидоров

Инвариантные римановы метрики Эйнштейна на обобщенных пространствах Уоллача

В статье рассматриваются инвариантные римановы метрики Эйнштейна на обобщенных пространствах Уоллача.

С.В. Чеботарев, Г.А. Чеботарева

О эквивалентности конечных сумм от функций случайных величин

Материал этой статьи продолжает исследования, начатые ранее, применительно к последовательностям функций от случайных величин.

С.В. Чеботарев

О существовании стационарных последовательностей с эквивалентной суммой случайных величин и их свойства

В статье рассмотрены вопросы построения стационарных, в узком смысле, последовательностей с суммой случайных величин, эквивалентной сумме случайных величин исходной последовательности, и их свойства.

М.А. Чешкова

К геометрии поверхностей, имеющих плоские линии кривизны

В евклидовом пространстве E^3 изучаются поверхности M , у которых линии кривизны плоские. Частным случаем таких поверхностей являются циклиды Дюпена — поверхности, линии кривизны которых есть окружности.

Исследуются линии F_i^j , описываемые фокальными точками F_i поверхности вдоль j -тых линий кривизны. В частности доказывается следующая теорема.

Теорема. Если поверхность M есть циклида Дюпена, то кривая F_i^j есть коническое сечение. Определены директрисы кривых F_i^j через метрические и асимптотические тензоры поверхности.

Топология локально минимальных сетей натянутых на выпуклую пятиугольную границу

В статье исследуется возможное топологическое устройство сетей, натянутых на выпуклую границу, состоящую из пяти точек.

ФИЗИКА

Е.С. Ананьева, А.Д. Насонов, В.Б. Маркин

Возможность прогнозирования вязкоупругих свойств полимерного композита с комбинированным наполнителем

Практика создания и использования ПКМ активно стимулирует решения главной проблемы механики неоднородных сред - установление количественных соотношений между микроструктурой композита и его механическими свойствами. Однако классическая в своей постановке задача далека от завершения, и является весьма актуальной. Это обусловлено многообразием ПКМ, различающимися качественными и количественными параметрами, а также математическими трудностями.

П.Д. Голубь

Электромеханические свойства полимеров

Рассмотрены условия проявления электрических свойств полимеров как изоляторов, полупроводников, проводников и сверхпроводников. Изучена корреляция между электрическими и механическими характеристиками полимеров. Используя связь упругих модулей и напряжения пробоя, оценены значения этих параметров полимеров в области низких температур.

А.А. Коваленко, Е.М. Скурыдина, О.В. Пожидаева

Исследование молекулярной подвижности сложных эфиров целлюлозы

В диапазоне температур 290 ÷ 550 К методом диэлектрического термического анализа проведены исследования характера молекулярной подвижности предгидролизованной древесины осины и трех сложных эфиров целлюлозы, полученных в результате взаимодействия древесины осины с глицином, β -аланином и γ -аминомасляной кислотой. Определено наличие релаксационных переходов и описаны их характеристики. Показано, что спектрометрический анализ температурных зависимостей диэлектрических потерь в столь сложных полимерных системах служит надежным и высокочувствительным методом исследования молекулярной подвижности.

Ю.Г. Скурыдин, Е.М. Скурыдина

Композиционный материал из растительных отходов без связующих средств

На протяжении ряда лет разрабатывается и совершенствуется способ получения композиционных материалов из растительных отходов без использования каких-либо связующих веществ. В его основе лежит глубокая механохимическая модификация растительного комплекса перегретым паром методом взрывного автогидролиза. Получаемые материалы обладают высокими физико-механическими характеристиками, не уступающими, а зачастую и существенно превышающими показатели традиционных древесно-композитных материалов.

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ***А.М. Ищук*****Тестовые задания по римановой геометрии и тензорному анализу**

В работе рассматривается пример тестового задания по материалу курса "Риманова геометрия и тензорный анализ".

С.С. Маусымбаев, И.В. Павлов**Применение компьютерных моделей в спецкурсе "Движение заряженных частиц в электромагнитных полях"**

В данной работе рассматривается применение компьютерных моделей при изложении спецкурса "Движение заряженных частиц в электромагнитных полях".

А.П. Ореховская**Из опыта обучения студентов доказательству неравенств**

В работе рассматриваются некоторые вопросы преподавания элементарной математики, связанные с доказательством неравенств.

Л.Н. Токарева**Особенности учетной политики бюджетного учреждения в период реформирования бухгалтерского учета**

В работе рассматриваются особенности учетной политики бюджетного учреждения в период реформирования бухгалтерского учета.

ПЕРСОНАЛИИ

А.С. ПОПОВ И ЕГО ИЗОБРЕТЕНИЕ

Сто лет назад в новогоднюю ночь с 1905 на 1906 год ушел из жизни человек, подаривший всему цивилизованному миру свое гениальное изобретение - радио.

Александр Степанович Попов родился на Урале в селении Туринские рудники 16 марта 1859 года. Его родители были далеки от науки, поскольку отец был священнослужителем, а мать, имея медицинское образование, обучала рукоделию в домашней девичьей школе и занималась воспитанием своих семерых детей (два сына и пять дочерей).

Саша с детского возраста увлекался постройкой различных движущихся механизмов, моделей водяных колес, мельниц и т.п. Сначала он учился в училище, где преподавал литературу его старший брат Рафаил. Закончив курс начального образования с отметкой "5", он поступает в Пермскую семинарию, в которой раньше учились его отец и старший брат. Здесь Александр увлекается точными науками, усердно изучает их, за что у друзей-семинаристов получает прозвище "математик". Физика в семинарии изучалась поверхностно, на нее отводилось в 5 раз меньше учебного времени, чем на занятия по греческому языку, и, тем не менее, Попов больше всего заинтересовался именно этой наукой, что и предопределило его дальнейшую судьбу.

Следующим местом учебы А.С.Попов избрал физический факультет Петербургского университета, куда он был зачислен в августе 1877 года без вступительных экзаменов, поскольку на выпускных экзаменах в семинарии получил по всем предметам высший балл. Хотя по причине недостаточной финансовой обеспеченности семьи он освобождался от оплаты за учебу, ему постоянно приходилось думать о хлебе насущном и искать себе заработок. Положение усугублялось еще и тем, что вместе с ним в Петербург приехали и две его сестры, которым необходимо было помогать материально. Он репетировал гимназистов, делал переводы с иностранных языков, а на старших курсах работал в товариществе "Электротехник", которое занималось установкой дугового освещения в садах и общественных учреждениях, а также строил небольшие частные электростанции. В этом товариществе Александр получил много ценных практических навыков, что сыграло позитивную роль в его дальнейшей изобретательской деятельности.

Несмотря на большую загруженность он находит время для занятий в физической лаборатории университета, где становится прекрасным экспериментатором.

К окончанию университета А.С.Попов становится семейным человеком, женившись на Раисе Алексеевне Богдановой – дочери петербургского адвоката, с которой познакомился, давая уроки в качестве репетитора. В 1882 году он получает университетский диплом, в котором большинство предметов значились отличной оценкой. Такие успехи были высоко оценены Советом Университета, присудившим А.С.Попову ученую степень кандидата, одновременно ему была предложена должность преподавателя в Минном офицерском классе в городе Кронштадте, которую он занимал на протяжении 17 лет.

Дальнейшая карьера Александра Степановича складывалась успешно. В 1900 году его избирают профессором кафедры физики Петербургского электротехнического института, а через год он становится заведующим этой кафедрой. И, наконец, в 1905 году он избирается ректором электротехнического института.

После открытия Г.Герцем электромагнитных волн А.С.Попов приступил к их систематическому изучению, хорошо понимая практическую значимость использования беспроводной связи особенно для морского флота. Он занимался конструированием чувствительного приемника электромагнитных волн, излучаемых вибратором Герца. В качестве индикатора он использовал когерер – стеклянную трубку, заполненную металлическими опилками, которые резко изменяют электрическое сопротивление под влиянием искрового разряда. Для увеличения чувствительности приемного устройства он присоединил к когереру длинную медную проволоку, выполняющую роль антенны. В результате получилась удобная рабочая конструкция – "прибор для обнаружения и регистрирования электрических колебаний" - радиоприемник.

7 мая 1895 года на заседании Русского физико-химического общества А.С.Попов впервые в мире успешно демонстрирует свое изобретение, осуществив опыты по передаче и приему радиосигналов на расстоянии 60 метров. Первая радиограмма состояла из двух слов "Генрих Герц". Таким образом Александр Степанович, проявив благородство, отдал дань уважения ученому, экспериментально получившему электромагнитные волны. Свой доклад он закончил словами "... могу выразить

надежду, что мой прибор при дальнейшем усовершенствовании может быть применен для передачи сигналов на большие расстояния при помощи быстрых электромагнитных колебаний, как только будет найден источник таких колебаний, обладающий достаточной энергией". И, действительно, постоянно совершенствуя свое изобретение, Попову удается стремительно наращивать расстояние радиосвязи: 1896 год - 250 метров, 1897 год - 5 км., 1899 год - до 50 км.

Практическая значимость данного радиоустройства не заставила себя ждать. В ноябре 1899 года, отправляющийся в заграничное плавание броненосец "Генерал - адмирал Апраксин", вследствие тумана и навигационной ошибки сел на камни у острова Гогланд в Финском заливе. Тяжелые повреждения и зима сильно затрудняли спасательные операции. Так как между островом и берегом не было никаких средств связи, морское министерство предложило Попову использовать свое изобретение, установив линию беспроволочной связи. Попов и его ассистент Рыбкин безотлагательно приступили к сооружению станции, установке высоких мачт и подвеске антенн. Работы чрезвычайно затруднялись сильными морозами, а, главное, отсутствием достаточного опыта, и все же станции заработали в кратчайшие сроки. По стечению обстоятельств, радиограмма, открывшая запись в вахтенном журнале станций, требовала спасения человеческих жизней. Вот текст этой телеграммы: "Командиру "Ермака". Около Левенсари оторвало льдину с рыбаками. Окажите помощь". Благодаря этой телеграмме "Ермак" немедленно вышел в море и снял со льдины 27 рыбаков, спас им жизни. За более чем трехмесячную работу станций между берегом и броненосцем "Генерал - адмирал Апраксин" было передано около 400 телеграмм, надежная связь осуществлялась на расстоянии в 52 км. Беспроволочный телеграф сразу же показал человечеству, каким мощным и надежным средством связи он является.

Морское ведомство России поручает А. С. Попову начать работы по внедрению беспроволочного телеграфа на судах флота, и с этой задачей он успешно справляется, получив поддержку и помощь адмирала Макарова.

Изобретение А.С.Попова дало толчок для быстрого развития радиосвязи во всем мире. Дальнейший прогресс пошел очень быстро, ибо в дело ввязался крупный капитал. Правительства передовых стран, правильно оценив возможности радиосвязи, щедро субсидировало работы по усовершенствованию беспроволочного телеграфа. В 1897 году (через два года после первых опытов Попова) итальянский инженер Г. Маркони получил английский патент на передачу телеграмм без проводов, чем оспаривал приоритет на изобретение радио. Эта проблема неоднократно решалась правительственными международными комиссиями. В настоящее время вопрос об изобретателе радио решен окончательно и однозначно - им является русский ученый-физик Александр Степанович Попов. Радио - это детище гения русского человека. Начиная с 1945 года, ежегодно 7 мая отмечается в нашей стране как День радио.

Важно подчеркнуть свойственное А.С.Попову стремление к практическому использованию знаний на блага людей, самозабвенную любовь к своей Родине и верность ей даже тогда, когда в царской России ему жилось совсем непросто из-за своих прогрессивных взглядов. Невзирая на трудные условия царского режима, он не принял самых заманчивых предложений зарубежных фирм продать им патенты на свое изобретение. На поступающие ему предложения переехать за границу Александр Степанович неизменно отвечал: "Я русский человек, и все свои знания, весь свой труд я имею право отдать только моей Родине. И если не современники, то, может быть, потомки наши поймут, сколь велика моя преданность Родине и как счастлив я, что не за рубежом, а в России открыто новое средство связи".

Последние годы жизни А.С.Попова совпали с бурными временами первой русской революции. По всей стране тогда прокатились волны забастовок. Революционное движение захватило и студенчество. Студенты электротехнического института, ректором которого в то время был Александр Степанович, в ответ на расстрел рабочих на баррикадах Красной Пресни, открыто выступили на стороне прогрессивных сил. В студенческих общежитиях института начались повальные обыски, полиция искала нелегальную литературу и оружие, в аудиториях института появляются полицейские надзиратели и тайные агенты. А.С.Попова возмущали такие действия властей, он резко возражал против подобных мер воздействия на студенчество. Его вызывают к градоначальнику Петербурга и к царскому министру, которые грозят новыми репрессиями и карательными мерами. Попов отказывается выполнять их требования и уходит домой в тяжелейшем состоянии, но не отступив от своих убеждений.

Эти обстоятельства стали роковыми для Александра Степановича. Вот что пишет о послед-

них днях его дочь Екатерина: "29 декабря отец имел тяжелое объяснение с градоначальником. По возвращению домой почувствовал себя плохо, но все же поехал на заседание в институт. Поздно возвратившись домой, он слег в постель. Произошло кровоизлияние в мозг. Моя мать, врач по образованию, приняла необходимые меры. 31 декабря она пригласила профессора. Осмотрев больного вместе с матерью и приняв ее за лечащего врача, он сказал: "Больной безнадежен, надо подготовить жену больного". Мать ответила: "Это я - его жена". В 5 часов вечера, когда мы, дети, бабушка и воспитательница сели обедать, открылась дверь из спальни отца. На пороге появилась моя мать и сказала: "Дети, идите сюда. Настали последние минуты". Братья мои стали делать отцу искусственное дыхание, мать подносила нашатырный спирт, но все было кончено".

Александр Степанович Попову было отмерено жизнью всего 46 лет. Однако, имя этого скромного и честного ученого, подарившего человечеству одно из самых замечательных достижений цивилизации - радио, навсегда вписано в историю науки.

П.Д. Голубь

ХРОНИКА

Шестая краевая конференция

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ НА АЛТАЕ (МОНА-2005)

Алтайский государственный технический университет, Барнаулский государственный педагогический университет провели конференцию МОНА-2005. Конференция состоялась 21 октября 2005 года на базе Алтайского государственного технического университета.

Программный комитет пригласил на конференцию ряд ведущих ученых региона. Председатель программного комитета – академик РАН Ю.Г.Решетняк.

Секции конференции МОНА-2005:

Дифференциальные уравнения и математические методы в механике.

Алгебра, математическая логика, геометрия и анализ.

Теория и методика обучения в области естественных и технических наук.

Прикладная математика и информатика.

Теория и методика профессионального образования.

В работе конференции приняли участие преподаватели факультета математики и информатики БГПУ. По результатам работы конференции выпущен сборник трудов. Решено, что следующая конференция состоится в Барнаулском государственном педагогическом университете в 2006 году.

**Г.В.Пышноград, зав. кафедрой высшей математики АлтГТУ,
Е.Д.Родионов, зав. кафедрой геометрии БГПУ**

ИЗДАНО В БГПУ

Абрамкин Г.П. Основы численных методов: Учебное пособие. - Барнаул: Изд-во БГПУ, 2005. 218 с.

Допущено Учебно-методическим объединением по направлениям педагогического образования Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 540200 (050200) "Физико-математическое образование".

Книга представляет собой учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 540200 (050200) "Физико-математическое образование" и обеспечивает методическую основу для взаимодействия со специальными курсами, относящимися к этому направлению. Наряду с базовыми понятиями, методами и приемами рассматривается технология решения задач с использованием компьютеров, обсуждаются возможные погрешности, дается определение вычислительных алгоритмов и рассматриваются их особенности. Большое внимание уделяется точности получаемых результатов и построению эффективных алгоритмов. Изложение сопровождается большим количеством блок-схем, которые можно использовать для составления программ на любом языке программирования.

Четкое разделение теоретических и практических компонентов курса позволит студентам и преподавателям гибко использовать представленный материал с учетом особенностей конкретных учебных планов и программ, а также принятых форм и методов обучения.

Владимирцева С.А. Теория и методика обучения математике: Общая методика: Учебное пособие. Барнаул: Изд-во БГПУ, 2005. - 158 с.

Рекомендовано УМО по специальностям педагогического образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 032100 "Математика".

В учебном пособии рассматриваются общие вопросы обучения математике в школе. Проблема формирования конструктивно-проектировочной деятельности будущего учителя решается на основе обучения и учебного занятия.

Книга предназначена студентам математических факультетов педагогических вузов, преподавателям методики обучения математике и учителям.

Ефремов Ю.С. Статистическая физика и термодинамика: Учебное пособие. - Барнаул: Изд-во БГПУ, 2005. - 208 с.

Допущено Учебно-методическим объединением по направлениям педагогического образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 540200 (050200) "Физико-математическое образование".

Учебное пособие содержит систематическое изложение раздела курса теоретической физики "Статистическая физика и термодинамика". Оно написано в соответствии с требованиями государственного стандарта по специальности 032200.00 "Физика с дополнительной специальностью" и специальности 032200 "Физика".

Ефремов Ю.С., Петропавловский М.Д. Методы математической физики в пакете символьной математики Maple: Учебное пособие. 2-ое изд., испр. и доп. - Барнаул: Изд-во БГПУ, 2005. - 300 с.

Допущено Учебно-методическим объединением по направлениям педагогического образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 540200 (050200) "Физико-математическое образование".

Учебное пособие содержит систематическое изложение раздела курса "Методы математической физики". Оно написано в соответствии с требованиями государственного стандарта по специальности 032200.00 "Физика с дополнительной специальностью" и специальности 032200 "Физика". Исследованы возможности применения пакета символьной математики Maple для решения уравнений математической физики.

Крутский А.Н. Ток, заряд, напряжение, сопротивление в курсе физики основной и полной средней школы: Учебно-методическое пособие. Барнаул: Изд-во БГПУ, 2005. - 40 с.

Работа посвящена вопросам изучения основных электротехнических величин тока, заряда, напряжения, сопротивления в курсе физики основной и полной средней школы. Проблема разработки методики изучения данных вопросов возникла в связи с тем, что при переходе на новый ГОСТ Международной системы единиц СИ изменены функции величин. Если до принятия нового ГОСТа основной величиной системы был заряд, то после введения нового стандарта его место заняла сила тока, а заряд стал величиной производной. В связи с изменением функций величин изменились логика их введения и некоторые связанные с ними единицы и их определения. Между тем, обучение в школах ведется без учета требования новых Государственных стандартов.

Пособие может быть использовано методистами физики, студентами физических факультетов, учителями и учащимися школ.

Львова Л.В. Дифференциальная геометрия: Учебное пособие. Барнаул: Изд-во БГПУ, 2005. - 104 с.: ил.

Допущено Учебно-методическим объединением по направлениям педагогического образования Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов математических специальностей педагогических вузов.

В пособии рассмотрены основы теории кривых и поверхностей в евклидовом пространстве. Приведены задачи для самостоятельной работы.

Пособие предназначено для студентов физико-математических факультетов педагогических вузов.

Матвеев В.М., Скулов П.В., Третьякова Л.А. Тесты и задачи по физике: Учебно-методическое пособие. Часть I. Барнаул: Изд-во БГПУ, 2005. - 96 с.

В данном пособии приведены тесты и задачи для подготовки к сдаче ЕГЭ в соответствии с образовательным стандартом в объеме требований Единого государственного экзамена. Тесты и задачи составлены по типу заданий, применяемых в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ. В конце книги даны ответы и решения задач. В приложении приведено: спецификация, кодификатор и справочный материал для решения задач.

Предназначается для выпускников средних общеобразовательных школ, слушателей подготовительных отделений и курсов, абитуриентов, студентов физического факультета, учителей физики и лиц, занимающихся самообразованием.

Нечаев И.Д. Приложения определенного интеграла: Учебное пособие. - Барнаул: Изд-во БГПУ, 2005. - 104 с.

В данном учебном пособии рассматриваются вопросы приложения определенного интеграла в математике и физике, которые изучаются в курсе математического анализа в педуниверситете на факультете математики и информатики.

Пособие построено так, что излагаемый материал может быть использован на занятиях в аудитории, для самостоятельной работы студентов, контроля пройденного материала.

Предлагаемое учебное пособие предназначено для студентов очного и заочного отделений.

Певин Н.М. Практикум по физике: Механика: Учебное пособие. - 2-ое изд., доп. и перераб. - Барнаул: Изд-во БГПУ, 2005. - 84 с.: с ил.

Пособие содержит описания лабораторных работ по механике и рекомендации по проведению учебного лабораторного практикума, методике обработки экспериментальных данных и оценки погрешностей измерения.

Пособие предназначено для студентов физико-математических факультетов педагогических вузов.

Рыжова Н.И., Каракозов С.Д., Шукшин Д.А. Основы технологии создания образовательного Интернет-ресурса. Система лабораторных работ: Учебное пособие. - Барнаул: Изд-во БГПУ, 2005. - 274 с.

Данное учебное пособие представляет собой систему лабораторных работ, предназначенную для обучения широкого контингента слушателей основам технологии создания образовательных Интернет-ресурсов на базе широко распространенного и доступного пакета инструментальных средств для Web-дизайна - Macromedia Studio MX.

Пособие может быть использовано как один из компонентов методической поддержки таких учебных курсов, как "Теория и методика обучения информатике", "Информационные системы" и "Компьютерные сети, Интернет и мультимедиа-технологии".

Будет полезно студентам, аспирантам, а также учителям-предметникам, которые интересуются разработкой и внедрением Интернет-ресурсов в учебный процесс и исследованиями в области методики обучения.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

- Ананьева Елена Сергеевна** – кандидат технических наук, доцент АГТУ.
- Голубь Павел Дмитриевич** – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры общей физики БГПУ, член-корр. МАНПО.
- Дудкин Анатолий Александрович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии БГПУ.
- Завьялова Людмила Алексеевна** – аспирант БГПУ, ассистент кафедры геометрии БГПУ.
- Ищук Анна Михайловна** – ассистент кафедры геометрии БГПУ. E-mail: wells@uni-altai.ru
- Кузьмина Анна Сергеевна** – магистрант факультета математики и информатики БГПУ. E-mail: akuzminal@yandex.ru
- Кыров Владимир Александрович** – ассистент кафедры физики и МПФ ГаГУ. E-mail: kfizika@gasu.ru.
- Коваленко Андрей Андреевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической физики и математики БГПУ.
- Маусымбаев Серикбай Салимбекович** – кандидат физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой общей физики СГПИ. E-mail: kainar@semck.kz
- Михайличенко Геннадий Григорьевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики и МПФ ГаГУ. E-mail: kfizika@gasu.ru.
- Маркин Виктор Борисович** – доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой физики и технологии композиционных материалов АлтГТУ.
- Насонов Алексей Дмитриевич** – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры общей и экспериментальной физики БГПУ.
- Ореховская Анфиса Петровна** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа БГПУ.
- Павлов Игорь Владимирович** – старший преподаватель кафедры общей физики СГПИ. E-mail: iwp@rambler.ru
- Пожидаева Ольга Валерьевна** – аспирант кафедры физики АлтГТУ
- Поликанова Ирина Викторовна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии БГПУ.
- Раков Андрей Егорович** – аспирант кафедры геометрии БГПУ.
- Родионов Евгений Дмитриевич** – доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой геометрии БГПУ. E-mail: rodionov@uni-altai.ru
- Сидоров Алексей Сергеевич** – аспирант кафедры геометрии БГПУ. E-mail: sidorov@math.dcn-asu.ru
- Скурыдин Юрий Геннадьевич** – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры теоретической физики БГПУ. E-mail: skur@rambler.ru
- Скурыдина Елена Михайловна** – аспирант АлтГТУ, ассистент кафедры теоретической физики БГПУ. E-mail: skudem@rambler.ru
- Славский Виктор Владимирович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа АлтГУ. E-mail: slav@math.dcn-asu.ru
- Токарева Любовь Николаевна** – главный бухгалтер БГПУ. E-mail: ten@uni-altai.ru
- Чеботарев Сергей Всеволодович** – старший преподаватель кафедры теоретической физики БГПУ.
- Чеботарева Галина Андреевна** – ведущий инженер программист ГУЗ АКОД.
- Чешкова Мира Артемовна** – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа АлтГУ. E-mail: cma@math.dcn-asu.ru
- Шевелев Владимир Владимирович** – аспирант кафедры геометрии БГПУ.

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ И ЧИТАТЕЛЕЙ

Барнаульский государственный педагогический университет
осуществляет издание регионального научного журнала
**ВЕСТНИК БАРНАУЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

Журнал выпускается по сериям:

- естественные и точные науки;
- гуманитарные науки;
- психолого-педагогические науки.

Периодичность издания: 1 номер в год.

Одновременно издается электронная версия журнала для представления в Internet.

**При предоставлении материалов в заявке на публикацию нужно указать
следующую информацию об авторах:**

1. Фамилия, имя, отчество.
2. Ученая степень, ученое звание.
3. Место работы, должность.
4. Контактные данные (почтовый индекс и адрес, телефон, факс, E-mail).

Правила оформления материалов, предоставляемых к публикации:

1. Статья представляется в электронном виде на дискете или по электронной почте (E-mail: vbspu@bspu.secna.ru) и в виде рукописи.
2. Рукопись статьи должна представлять собой распечатку на принтере полной версии текста (включая весь иллюстративный материал) на одной стороне писчей белой бумаги формата A4 (21x30 см).
3. **Статья, представленная в серию естественные и точные науки, набирается в LATEX:**
 - версия LATEX 2e (можно использовать ams-расширение);
 - использовать стандартный стилевой файл multicol.sty и файл dbgpu.sty (его можно взять в редакции или на сайте БГПУ);
 - рисунки в формате EPS;
 - если используется автоматическая нумерация, то вначале статьи вставить команду обнуления счетчика.

Ниже приведен пример преамбулы статьи набранной в Latex:

```
\documentclass[10pt,twoside]{report}
\usepackage[cp1251]{inputenc}
\usepackage[russian]{babel}
\usepackage{amsmath,amssymb,amsopn,multicol,graphicx,dbgpu}
\voffset -30pt \hoffset -75pt \language=1
% Примеры макросов. Не злоупотреблять!!!
\newenvironment{remark}{\par \noindent\bf Замечание.\it{}}{}
\newenvironment{theorem}{\noindent \bf Теорема.\it{}}{}
\DeclareMathOperator{\ad}{ad}
\begin{document}
% Заголовок статьи заполняется автором:
% заголовок включает в себя УДК, И.О.Ф. авторов,
```

```

% название статьи, краткий вариант названия для колоннитула,
% Ф.И.О авторов для сборки оглавления
\newpage
\chaptermark{\siil Вестник БГПУ: Естественные и точные науки}{\siil А.М.~Ломшаков. Инвариантные
метрики Эйнштейна \dots} \maketitle{514.765}{А.М.
Ломшаков\footnotemark[1]}{Инвариантные метрики Эйнштейна на три
локально-симметрических римановых пространствах.}{Ломшаков
А.М.}{ИНВАРИАНТНЫЕ МЕТРИКИ ЭЙНШТЕЙНА НА ТРИ
ЛОКАЛЬНО-СИММЕТРИЧЕСКИХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ.}
% Содержание статьи оформляется обычным образом. В нужных местах дается команда
% \begin{multicols}{2}[ ] перехода на два столбца, в квадратных скобках необязательный
% аргумент (текст общего заголовка). Возвращение в режим одного столбца \end{multicols}
\footnotetext[1]{Работа выполнена при поддержке Российского фонда
фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00543)}
\setcounter{figure}{0} \setcounter{equation}{0}
\setcounter{ttable}{0}
\begin{multicols}{2}
{\bf Введение.} В [1, 2, 3] изучались инвариантные эйнштейновы
метрики на три локально-симметрических римановых пространствах ...
.....
\begin{center}
\scalebox{1}[1]{\includegraphics[angle=0,totalheight=2in]{pic.eps}}
\end{center}
.....
\end{multicols}
\begin{makebiog}
\bibitem{1} Wallach N. Compact homogeneous riemannian manifolds with
strictly positive curvature // Ann. math. 1972. V. 96. P. 277-295.
\bibitem{2} Родионов Е.Д. Эйнштейновы метрики на четырехмерных
однородных пространствах, допускающие однородную риманову метрику
положительной секционной кривизны // Сиб. мат. жур. Т.32. 1991.
№3. С. 126-131.
\bibitem{3} Бессе А.Л. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.
\bibitem{4} Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики: Учебное
пособие для втузов. 3-е изд., испр. М.: Наука, 1966. - 664 с.
\end{makebiog}
\end{document}

```

4. Список литературы составляется в порядке цитирования. Все таблицы должны иметь заголовки. Рисунки должны иметь подписи.
5. Должен быть представлен реферат на русском языке; сведения об авторах (фамилия, имя, отчество, ученая степень и звание, должность, место работы, телефон для связи); статьи по естественным и точным наукам должны иметь соответствующий номер УДК.
6. Все единицы физических величин в тексте и на графиках даются в системе СИ согласно стандарту "Метрология. Единицы физических величин".
7. Ссылки на формулы необходимо заключать в круглые скобки и проставлять их справа.
8. Ссылки на цитируемую литературу даются в тексте цифрами в квадратных скобках в порядке цитирования.
9. Объем публикации не должен превышать 10 страниц (вместе с аннотацией, литературой и остальным материалом), подготовленных в соответствии с правилами. Каждый автор может представить в один номер не более двух статей: одну в соавторстве, одну как автор.
10. К статье прилагается акт экспертизы (для статей по естественным и техническим наукам).
11. Статьи, не соответствующие указанным требованиям, приниматься не будут.

Рукописи отправляются редакцией на независимую экспертизу и принимаются к печати при получении положительной рецензии. При наличии отрицательной рецензии окончательное решение о публикации статьи принимается редколлегией.

Присланные материалы не возвращаются. Корректурa авторам не высылается.