

РЕШЕНИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППАРАТА «НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ»

Зудина Т.А.

(г.Пенза, Пензенский государственный педагогический институт)

(e-mail: zudina79@penza.com.ru)

В предлагаемой статье автор размышляет о взаимосвязи школьных курсов математики и информатики, а также о возможности пропедевтического знакомства с новыми для школы математическими понятиями, в частности с таким понятием, как «Нечеткое множество» на уроках информатики.

Общеизвестно, что школа оторвана от жизни. Понятия и категории, употребляемые в реальной жизнедеятельности людей, имеют размытые, нечеткие границы, что в настоящее время не учитывается в школьных задачах. Выпускники школ часто теряются, сталкиваясь с реальной действительностью. Кроме того, всем известен так называемый «юношеский максимализм», подростки очень категорично высказывают свои суждения по многим вопросам, не признавая полутонов. Но разве школа невольно не способствует его развитию, ведь учась в школе, школьники привыкают к точным решениям, прямому перебору и пересчёту различных альтернатив, как правило, пренебрегая качественной оценкой ситуации.

В последнее время бурно развивается и находит широкое применение в технических, социальных, экономических науках теория *Нечетких множеств*

Идея, лежащая в основе теории нечетких множеств, заключается в том, что человек в своей повседневной жизни мыслит и принимает решения на основе нечетких понятий. Создание теории нечетких множеств - это попытка формализовать человеческий способ рассуждений. Развитие вычислительной техники позволяет в настоящее время создавать на базе теории нечетких множеств системы нечеткой логики, которые копируют способ рассуждений человека.

Изучение теории нечетких множеств в школе на основе рассмотрения специально подобранных задач с реальным содержанием помогут школьникам научиться качественно оценивать ситуацию, делать выбор среди нескольких альтернативных вариантов.

В качестве примера рассмотрим две задачи, которые часто встречаются в повседневной практике. Для их решения удобно использовать электронные таблицы. В

свою очередь эти задачи являются хорошими упражнениями при изучении электронных таблиц.

Задача 3. «Оптимальный выбор»

С математической точки зрения не существует идеального способа решения таких задач. Рассмотрим различные варианты этой задачи.

а) одинаковая важность критериев.

Пусть имеется множество из k альтернатив $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

Тогда для критерия C может быть рассмотрено нечеткое множество

$$C = \{\mu_c(a_1)/a_1, \mu_c(a_2)/a_2, \dots, \mu_c(a_m)/a_m\},$$

где $\mu_c(a_i) \in [0, 1]$ — оценка альтернативы a_i по критерию C , характеризует степень соответствия альтернативы понятию, определяемому критерием C .

Если имеется n критериев: $C_1, C_2, \dots, C_n$, то лучшей считается альтернатива, удовлетворяющая и критерию C_1 , и C_2 , и ..., и C_n . Тогда правило для выбора наилучшей альтернативы может быть записано в виде; пересечения соответствующих нечетких множеств:

$$D = C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n$$

Операции пересечения нечетких множеств соответствует операция *min*-, выполняемая над их функциями принадлежности. В качестве лучшей выбирается альтернатива a^* , имеющая наибольшее значение функции принадлежности:

Пример 1. «Выбор школы»

Рассмотрим пример выбора варианта при равной важности требований.

Требуется выбрать школу для первоклассника. Требования, предъявляемые к школам таковы: $C1$ — близость к дому; $C2$ — профессионализм учителя; $C3$ — оснащенность школы, $C4$ — наличие хорошего питания. Пусть, имеется 3 школы: $a1, a2, a3$.

В результате экспертной оценки получили следующие данные, характеризующие степень принадлежности школ заданным требованиям:

$$C1 = \{0,9/a1; 0,7/a2; 0,8/a3\};$$

$$C2 = \{0,8/a1; 0,9/a2; 0,6/a3\};$$

$$C3 = \{0,7/a1; 0,8/a2; 0,9/a3\};$$

$$C4 = \{0,8/a1; 0,6/a2; 0,7/a3\}.$$

Существует несколько правил выбора. В соответствии с одним из них сначала находят соответствующие минимальные значения, из которых затем выбирают максимальное, оно указывает на результат.

$$D = \max \{ \min(0,9; 0,8; 0,7; 0,8/a_1); \min(0,7; 0,9; 0,8; 0,6/a_2);$$

$$\min(0,8; 0,6; 0,9; 0,7/a_3) \} = \max \{ 0,7/a_1; 0,6/a_2; 0,6/a_3 \}.$$

Таким образом, наилучшей является первая школа.
 $a1 = \{0,9; 0,8; 0,7; 0,8\}.$

По существу это задача оптимизации, в которой используется 4 критерия.

Пример оформления электронной таблицы.

	A	B	C2	D	E	F	G
1		C1	C2	C3	C4		Min
2	A1	0,9	0,8	0,7	0,8	"=МИН(B3:E3)"	0,7
3	A2	0,7	0,9	0,8	0,6	"=МИН(B4:E4)"	0,6
4	A3	0,8	0,6	0,9	0,7	"=МИН(B5:E5)"	0,6

Пример 2 .

Требуется купить телевизор, руководствуясь оптимальным соотношением «цена+качество». В магазине имеется 8 марок телевизоров. По просьбе покупателя они оценены экспертами по двум показателям: P - «качество» и N - «цена». Эксперты указали степени принадлежности понятиям «цена» и «качество» для каждого телевизора (для удобства представленные телевизоры пронумерованы).

Результаты приведены в таблице.

Степени принадлежности	Номера телевизоров									
	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10
$\mu_P(x)$	0,6	0,4	1	0,3	1	0	0,2	0,4	0,6	0,7
$\mu_N(x)$	0,6	0,2	0,1	0,7	0,4	0,4	1	0,4	0,8	0,2

Решим эту задачу двумя способами.

1 способ (аналогичный предыдущему).

Имеем: P - «качество», N - «цена» и C1, ... C10 – телевизоры.

Нечеткие множества можно записать в следующем виде:

$$P = \{0,6/C1; 0,4/C2; 1/C3; 0,3/C4; 1/C5; 0/C6; 0,2/C7; 0,4/C8; 0,6/C9; 0,7/C10\};$$

$$N = \{0,6/C1; 0,2/C2; 0,1/C3; 0,7/C4; 0,4/C5; 0,4/C6; 1/C7; 0,4/C8; 0,8/C9; 0,2/C10\};$$

Аналогично предыдущему примеру находим:

$$\begin{aligned}
D = & \max \{ \min (0,6; 0,6/C1); \min (0,4; 0,2/C2); \\
& \min (1; 0,1/C3); \min (0,3; 0,7/C4); \\
& \min (1; 0,4/C5); \min (0; 0,4/C6); \\
& \min (0,2; 1/C7); \min (0,4; 0,4/C8); \\
& \min (0,6; 0,8/C9); \min (0,7; 0,2/C10) \} = \\
& \max \{ 0,6/C1; 0,2/C2; 0,1/C3; 0,3/C4; 0,4/C5; 0/C6; 0,2/C7; 0,4/C8; 0,6/C9; 0,2/C10 \} = \{ \\
& (0,6/C1); (0,6/C9) \}
\end{aligned}$$

То есть в результате имеем два решения. Оптимальными для покупки являются телевизоры под номерами 1 и 9.

2 способ. Метод поиска Парето.

В прикладной статистике используют метод Парето для решения подобных задач. Критерии при использовании данного метода должны быть также равнозначными.

Рассмотрим его суть на примере использования двух критериев.

Пусть $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ – множество оценок альтернативных вариантов решения; $P(Y)$ – множество Парето – эффективных оценок решений.

Множество Парето – эффективных оценок $P(Y)$ представляет собой «северо-восточную» границу множества Y без тех его частей, которые параллельны одной из координатных осей или лежат в «глубоких» провалах.

Преимущества метода:

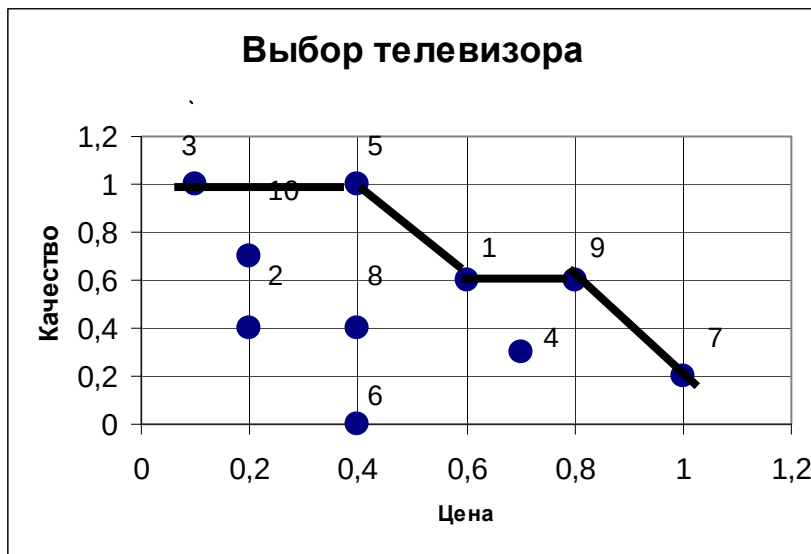
- 1) Критерии равнозначны;
- 2) Метод математически объективен.

Недостаток метода: одно окончательное решение получается только в частном случае, то есть количество Парето – эффективных решений, как правило, более одного.

В электронных таблицах задача о телевизорах имеет следующее решение. Столбцы A , B , C содержат соответственно номера телевизоров, степени принадлежности оценок качества и цены. Затем выбрать в Мастере диаграмм «Точечный график», выделить диапазон $B2:C11$, построить точечную диаграмму, при этом на шаге 2 работы «Мастера» на вкладке «Диапазон данных» в разделе «Ряды в » переключатель должен быть установлен на «столбцах». Установить необходимые параметры: добавить легенду, установить линии сетки по осям X и Y (это можно сделать как во время построения диаграммы с помощью Мастера, так и после).

Номер	Качество	Цена
1	0,6	0,6
2	0,4	0,2
3	1	0,1

4	0,3	0,7
5	1	0,4
6	0	0,4
7	0,2	1
8	0,4	0,4
9	0,6	0,8
10	0,7	0,2



То есть оптимальными являются телевизоры с номерами 5,9,7.]

Этот метод дает визуальное решение, что может быть неудобно. Поэтому ниже приводится программная реализация этого метода, результатами которой естественно будут те же номера.

Обозначения переменных:

$P(10)$ – массив, содержащий степени принадлежности нечеткого множества понятия «качество»;

$N(10)$ – массив, содержащий степени принадлежности нечеткого множества понятия «цена»;

$J(10)$ – массив, содержащий первоначальные номера элементов массивов (данные номера телевизоров);

$IN(10)$ - вспомогательный массив, содержащий искомые индексы (номера).

k - вспомогательная переменная (размерность массива IN);

$Max P$ – переменная, хранящая значение «восточной» границы.

Идея решения задачи.

Найти оптимальные решения, значит, отобрать номера телевизоров (индексы массивов), которые удовлетворяют правилу Парето. Для этого:

а) упорядочим один из массивов по убыванию (для определенности массив N), при этом сохраняем первоначальное соответствие степеней принадлежности цены и качества, а также запоминаем первоначальные номера элементов в массиве J ;

б) находим и запоминаем в массиве IN номера тех элементов, которые строго удовлетворяют понятию «северо-восточная граница» правила Парето;

с) вывод искомым номеров на экран.

‘ метод Парето

DIM P(11), N(11), j(11), IN(11), IN2(11)

‘ заполнение массивов

DATA .6,.3, 1, 0,.2, .4, .6, .7

DATA .6, .1, .7, .4, .4, 1, .4, .8,.2

FOR i = 1 TO 10: READ N(i): NEXT

FOR i = 1 TO 10: READ P(i): NEXT

FOR i = 1 TO 10: j(i) = i: NEXT

1 :FOR i = 1 TO 9

IF N(i) < N(i + 1) THEN

SWAP N(i), N(i + 1): SWAP P(i), P(i + 1): SWAP j(i), j(i + 1): GOTO 1

END IF

NEXT

k = 0: MaxP = P(1)

FOR i = 1 TO 10

‘исключаем элементы, находящиеся на одной горизонтали или внутри области

‘ при этом запоминаем новую «восточную» границу

IF N(i) = N(i + 1) AND MaxP <= P(i + 1) THEN MaxP = P(i + 1) ‘ заносим в массив

IN номера тех элементов, которые удовлетворяют «северо-восточному» условию

IF N(i) <> N(i + 1) AND P(i) >= MaxP AND P(i) <> P(i + 1) THEN

k = k + 1: IN(k) = i: MP = P(i)

END IF

NEXT

PRINT “Оптимальные номера телевизоров ”

FOR i = 1 TO k

‘выводим первоначальные номера элементов

PRINT J(IN(i))

NEXT

Замечание. Сравнивая решения, полученные по методам maxmin-композиции и Парето, делаем вывод, что покупать следует телевизор под номером 9.

б) различная важность критериев.

В случае, если критерии C_i имеют различную важность каждому из них приписывается число $\alpha_i \geq 0$, (чем важнее критерий, тем больше α_i), и правило выбора принимает вид

$$D = C_1^{\alpha_1} \cap C_2^{\alpha_2} \cap \dots \cap C_n^{\alpha_n},$$

$$\alpha_i > 0, \quad i = 1..n, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Коэффициенты относительной важности определяются на основе процедуры парного сравнения критериев. Вначале формируется матрица M , элементы которой находятся из таблицы 1 и удовлетворяют следующим условиям: $m_{ij}=1$; $m_{ij}=1/m_{ji}$

Затем находите w — собственный вектор матрицы M , соответствующий максимальному собственному значению λ_{max}

Искомые значения коэффициентов α_i получаются умножением элементов w на n для выполнения условия

$$\alpha_i = n w_i;$$

Пример 3. «Где строить?»

Критерии различной важности. Рассмотрим задачу выбора места для строительства химического комбината исходя из следующих критериев: C_1 - близость к потребителю; C_2 - близость к источникам сырья; C_3 - наличие в городе свободной рабочей силы.

Предполагаемые места строительства: a_1, a_2, a_3, a_4 .

Нечеткие множества, характеризующие альтернативные варианты с точки зрения различных критериев:

$$C_1 = \{0,5/a_1; 0,7/a_2; 0,3/a_3; 0,6/a_4\};$$

$$C_2 = \{0,5/a_1; 0,4/a_2; 0,8/a_3; 0,4/a_4\};$$

$$C_3 = \{0,2/a_1; 0,1/a_2; 0,6/a_3; 0,9/a_4\}.$$

Критерии имеют различную важность, результаты их попарного сравнения представлены матрицей M : Используя средства Mathcad, найдем собственное значение этой матрицы (функция `eigenvals (M)`) и собственный вектор, соответственный максимальному собственному значению (функция `eigenvec (M,z)`).

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 5 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{9} \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvals}(M) = \blacksquare$$

$$\text{eigenvec}(M, 3.029) = \blacksquare$$

$$0.5^{1.098} = \blacksquare$$

$$0.7^{1.098} = \blacksquare$$

$$0.3^{1.098} = \blacksquare$$

$$0.6^{1.098} = \blacksquare$$

$$0.5^{0.261} = \blacksquare$$

$$0.4^{0.261} = \blacksquare$$

$$0.8^{0.261} = \blacksquare$$

$$0.4^{0.261} = \blacksquare$$

$$0.2^{2.778} = \blacksquare$$

$$0.1^{2.778} = \blacksquare$$

$$0.6^{2.778} = \blacksquare$$

$$0.9^{2.778} = \blacksquare$$

Собственный вектор матрицы M : $w_1 = 0,366$; $w_2 = 0,087$; $w_3 = 0,926$. Тогда коэффициенты относительной важности критериев $m_1 = 3 \cdot 0,366 = 1,098$, $m_2 = 3 \cdot 0,087 = 0,261$, $m_3 = 3 \cdot 0,926 = 2,778$. Модифицируем множества C_i :

$$C_1^{1.098} = \{0,5^{1.098}/a_1; 0,7^{1.098}/a_2; 0,3^{1.098}/a_3; 0,6^{1.098}/a_4\} =$$

$$= \{0.467/a_1; 0.676/a_2; 0.267/a_3; 0.571/a_4\};$$

$$C_2^{0.261} = \{0.835/a_1; 0.787/a_2; 0.943/a_3; 0.787/a_4\};$$

$$C_3^{2.778} = \{0.011/a_1; 0.0017/a_2; 0.242/a_3; 0.746/a_4\}.$$

Получим множество, содержащее минимальные значения a_1, a_2, a_3, a_4 .

$$D = \{0.011/a_1; 0.0017/a_2; 0.242/a_3; 0.571/a_4\}.$$

Максимальное значение принадлежности имеет альтернатива a_4 - её и следует выбрать в качестве возможного места строительства.

Литература

1. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств М.: Радио и связь, 1982.
2. Родионов М.А., Зудина Т.А. Введение в «FUZZY LOGIC» (элективный курс для старшеклассников). Учебное пособие. Пенза, ПГПУ им. В.Г. Белинского, 2006.